



数値計算法(1)

Numerical Analysis

防災・環境地盤工学研究室
村上 哲
murakami@mx.ibaraki.ac.jp

Numerical Analysis

この授業について

- 到達目標
 - 「技術者としての基礎力」(II-i): 授業で対象とした基礎的な解析法・数値計算法を理解出来ること
 - 「専門基礎学力」(II-ii): 都市システム工学の基本的な課題と数値計算の関係を把握でき初歩的なプログラミングもできること
 - 「自律的・継続的学習能力」(I-vi): プログラミング技術を自ら学ぶ手順が身に付いていること
- 概要

技術計算能力の取得と向上を目指す本学科一連の情報関連科目の第3講です。この授業では、プログラミング言語としてFortranを使用し、これまでに学習した「行列・連立方程式・数値積分・数値微分・微分方程式」をプログラムで実現する基礎的知識や手法について、基礎から都市システム工学分野における応用を学びます。授業では、方法論・関数や技法を解説しますが、演習時間ではプログラムを作成してもらいます。この授業を通じて、プログラミングの方法を身に付けてください。

 - 数値計算法演習: 金曜日12:40-14:10 E5-201教室

Numerical Analysis

この授業について

- 成績評価

講義で取り扱った数値計算法に関する基礎とプログラミング能力の達成状況を、レポート課題により評価する。(40%程度)
講義で取り扱った数値計算法に関する知識の習得状況を、レポートにより評価する。(60%程度)
- 履修に当たっての注意事項

講義とその知識を利用したプログラミングを実施するので、予習と復習は必要です。本講義は情報処理概論プログラミング基礎(都市学生対象)、都市システム情報処理の発展的科目として位置づけています。講義で使っていたテキストは持参すること。

 - 遅刻は厳禁です。(30分を経過した後の遅刻は欠席とみなします。)

オフィスアワー: 月曜日5講時(16:00-17:30)

Numerical Analysis

授業計画

- ガイダンス、数値計算法について(導入)
- ベクトル、行列の基礎(情報処理概論の復習)
- 連立方程式の解法
 - ガウスの消去法
- 微分方程式の数値解法とプログラミング
 - ベクトル・行列の演算、ガウスの消去法の応用
- 地盤の圧密現象の数値シミュレーションとプログラミング
- 地盤の圧密現象の数値シミュレーション
- 最終レポート

Numerical Analysis

いきなりですが……

■ 例題1を解いてみてください。

関数が次のように与えられている。

$$f(x) = x^2 - 2$$

この時、次式で定義される方程式に対し、ある適当な x_0 を数値として与え、求められた x を順次 x_0 に代入していくと、最終的に収束する x の値は？

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

□ x_0 の初期値を以下のようにしてみましょう。

■ -2.0, -1.0, 1.0, 2.0

Numerical Analysis

■ 解析的に解を求めるとは……

関数

$$f(x) = x^2 - 2$$

において、 $f(x) = 0$ となる解を求めることを考える。

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2} = 1.4142$$

と解を得る。

Numerical Analysis

■ 数値的に解を求めるとは……

関数

$$f(x) = x^2 - 2$$

において、 $f(x) = 0$ となる解を求めることを考える。

【まず準備！】

正解値を $x = x_0$ として、テーラー展開を施し、第1項までを考慮すると、近似的に、

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

となる。これより、

$$x = x_0 - \frac{f(x_0) - f(x)}{f'(x_0)} \xrightarrow{f(x)=0 \text{ なので}} x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Numerical Analysis

■ 数値的に解を求めるとは……

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0}$$

初期値を $x_0 = 1.0$ として、 x を求める。	新しい値として $x_0 = 1.4182$ として、 x を求める。
$x = 1.0 - \frac{1.0^2 - 2}{2 \times 1.0} = 1.5$	$x = 1.4182 - \frac{1.4182^2 - 2}{2 \times 1.4182} = 1.4142$
新しい値として $x_0 = 1.5$ として、 x を求める。	新しい値として $x_0 = 1.4142$ として、 x を求める。
$x = 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2 \times 1.5} = 1.3125$	$x = 1.4142 - \frac{1.4142^2 - 2}{2 \times 1.4142} = 1.4142$
新しい値として $x_0 = 1.3125$ として、 x を求める。	$x = x_0$ (入力値と出力値の差が十分小さい) となり、解を得る。
$x = 1.3125 - \frac{1.3125^2 - 2}{2 \times 1.3125} = 1.4182$	$x = 1.4142$

Newton法(反復法)による解法

Numerical Analysis

プログラミングすると

変数の説明

x :実数: 変数x
f :実数: 関数の値
df:実数: 導関数の値
i :整数: 繰返し変数

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$f(x_0) = x_0^2 - 2$$

$$f'(x_0) = 2x_0$$

```

program ex0101a
!-----変数の宣言-----
real :: x, f, df
integer :: i

!-----初期値データの入力-----
read(*,*) x

!-----反復計算-----
do i=1,10
  f=x**2-2.0
  df=2.0*x
  x=x-f/df

!-----結果の出力-----
write(*,*) 'x=', x
end do
end program ex0101a
        
```

Numerical Analysis

プログラミングすると

```

graph TD
    Start([開始]) --> Input[/入力 x/]
    Input --> i1[i ← 1]
    i1 --> Decision{i > 10}
    Decision -- Yes --> End([終了])
    Decision -- No --> f["f ← x² - 2"]
    f --> df["df ← 2x"]
    df --> x["x ← x - f/df"]
    x --> Output[/出力 x/]
    Output --> iplus[i ← i + 1]
    iplus --> Decision
        
```

フローチャート

```

program ex0101a
!-----変数の宣言-----
real :: x, f, df
integer :: i

!-----初期値データの入力-----
read(*,*) x

!-----反復計算-----
do i=1,10
  f=x**2-2.0
  df=2.0*x
  x=x-f/df

!-----最終結果の出力-----
write(*,*) 'x=', x
end do
end program ex0101a
        
```

Numerical Analysis

プログラミングすると

実行結果 (初期値を50とした場合)

```

murakami@hcs[12]:./ex0101a
50
x= 25.02
x= 12.549968
x= 6.3546652
x= 3.3346972
x= 1.9672259
x= 1.491943
x= 1.4162384
x= 1.414215
x= 1.4142135
x= 1.4142135
murakami@hcs[13]:
        
```

初期値を-50とするとどうなるか?
初期値を??とするとどうなるか?

```

program ex0101a
!-----変数の宣言-----
real :: x, f, df
integer :: i

!-----初期値データの入力-----
read(*,*) x

!-----反復計算-----
do i=1,10
  f=x**2-2.0
  df=2.0*x
  x=x-f/df

!-----最終結果の出力-----
write(*,*) 'x=', x
end do
end program ex0101a
        
```

Numerical Analysis

■ 解析的に解を求めること、数値的に解を求めること

関数 $f(x) = x^2 - 2$

において、 $f(x) = 0$ となる解を求めることを考える。

数学的知識を使って

$x = \pm\sqrt{2}$

厳密解

数学的知識に基づいた、反復計算を行って

$x = \pm 1.4142135$

近似解

Numerical Analysis

■ 解析的に解を求めること、数値的に解を求めること

次の関数

$$f(x) = 4xe^{-x} - 1 \quad (x \geq 1)$$

において、 $f(x) = 0$ となる解を求めることを考える。

数学的知識を使って

厳密解

数学的知識に基づいた、
反復計算を行って

近似解

宿題とします。
 $x = 2.1532924$

Numerical Analysis

数値計算法とは？

■ 数値計算(数値解析): Numerical Analysis

数式で表される問題を、

- 解析的に解くことが不可能、
- あるいは、
- 困難な、
- あるいは、
- 面倒な

場合に、コンピュータなどを利用して数値的に解くこと。

Numerical Analysis

数値計算を利用する問題の種類

- 代数方程式
 - 線形方程式
 - 非線形方程式
 - 最適化問題
 - 最小・最大化問題
 - 固有値問題
- 微分方程式
 - 常微分方程式
 - 偏微分方程式
- 積分、積分方程式
- 確率
- 統計分析
 - 補間(近似)
 - 最小二乗法、最尤法など
 - 多変量解析

Numerical Analysis

数値シミュレーション

- 数値シミュレーションも数値計算法を利用している。
- 世の中にはいろいろなシミュレーションがある
 - 天気予報
 - 地球規模の気候変動(地球シミュレータ)
 - 洪水・氾濫
 - 津波
 - 地震・地震動
 - 軟弱地盤の沈下・変形
 - 橋のたわみ
 -など

Numerical Analysis

本講義で利用するコンピュータ言語について

- 本講義では、Fortran を利用します。
- Fortran にはいくつかのバージョンがあり、この講義は、Fortran 90の規格を用います。
- 大学の図書館には、以前のバージョンのFortran 77の規格をベースにした本もある。若干、仕様が異なるので、困惑しないこと。
- 私が参考になっている本の1つは下記です。
 - 小暮仁「Fortran90 –入門編–」、産業図書。

Numerical Analysis

Fortran90は意外とマイナー

- 本屋さんで見かけるコンピュータ言語には、Visual Basic、Cなど、沢山あるが、Fortranはあまり見かけない。
- ただし、プログラムの流れについては、共通する部分も多い。
- いわゆる言語の1つであるので、Fortranをベースにすると、Visual Basicなどを独習することは、比較的容易になる。

Numerical Analysis

課題1

次の関数

$$f(x) = 4xe^{-x} - 1 \quad (x \geq 1)$$

において、 $f(x) = 0$ となる解を、Newton法(反復法)を用いて求めるプログラムを作成しなさい。作成したプログラムを使って、解を求めなさい。

- 次の仕様でレポートを提出すること。
 - 1.問題
 - 2.プログラムで使用している変数の説明
 - 3.フローチャート
 - 4.プログラムのソース
 - 5.実行結果
 - 6.答え
 - 例題の場合の解答例を示しているので、それを参考にすること。→授業Webにある。

Numerical Analysis

授業Web

<http://www.geo.civil.ibaraki.ac.jp/murakami/class/>