

課題 1 (2) テンソルの不変量に関する課題

課題：

2 階のテンソル $\boldsymbol{\sigma}$ が

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r \end{bmatrix}$$

と与えられたとき、次の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{\sigma}$ の 1 次の不変量

$$I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{kk}$$

と、次式で与えられる p との関係式を示せ。

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_a + 2\sigma_r)$$

(2) 2 階のテンソル \mathbf{s} を次のように定義する。

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_a - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r - p \end{bmatrix}$$

この時、 \mathbf{s} の 1 次の不変量

$$J_1 = \text{tr}(\mathbf{s}) = s_{kk}$$

が、 $J_1 = 0$ となることを示せ。

(3) 2 階のテンソル \mathbf{s} を用いて定義した

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$$

と、次式で与えられる

$$q = \sigma_a - \sigma_r$$

との関係を用いて、

$$q = \sqrt{3J_2}$$

となる関係式を導け。

解答は、A4 用紙にて提出すること。

提出期限：平成 19 年 5 月 14 日の講義にて回収。
