

**地盤数値解析学特論**  
 Advanced  
 Geotechnical  
 Numerical Analysis

防災環境地盤工学研究室  
 村上 哲  
 Murakami, Satoshi

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 5. 変形問題

- 1. 飽和地盤の変形問題において満足すべき関係式
- 2. 解くべき微分方程式の境界値問題
- 3. 弱形式化
- 4. 有限要素定式化
- 5.有限要素法による計算の実行

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 1. 飽和地盤の変形問題において満足すべき関係式

基本則: 質量保存則: 常に満足 (連続の式)	運動量保存則: $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$ (力の釣合式)
境界条件: 変位境界: $v_i^s = v_i^{*s}$ ( $S_v$ 上において)	外力境界: $n_j \sigma_{ij} = \bar{t}_i^*$ ( $S_t$ 上において)
初期条件: $x_i(\mathbf{X}, t=0) = x_i^0$	$\sigma_{ij}(\mathbf{X}, t=0) = \sigma_{ij}^0$
諸関係式: ひずみ速度~変位速度関係: $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right)$	応力の対称性: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
応力分担式: $\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij}$	構成関係: $\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 2. 解くべき微分方程式の境界値問題

【飽和地盤の変形問題①】

偏微分方程式

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

を、次の関係式

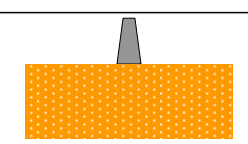
$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right) \quad \dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$$

が満足するように、初期条件・境界条件

$$x_i(\mathbf{X}, t=0) = x_i^0 \quad \sigma_{ij}(\mathbf{X}, t=0) = \sigma_{ij}^0$$

$$v_i^s = v_i^{*s} \quad (\text{S}_v \text{上において}) \quad n_j \sigma_{ij} = \bar{t}_i^* \quad (\text{S}_t \text{上において})$$

の下で解け。

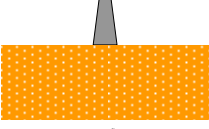


Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 3. 弱形式化

【飽和地盤の変形問題①】に対して、弱形式を誘導

偏微分方程式:  $\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = 0$



任意のベクトル関数  $\eta^s$

$\eta^s$  を乗じて体積積分を施す ただし、 $\eta^s = 0$  ( $S_V$  上において)

$\int_V \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \eta_i^s dV = 0$

部分積分の公式、Gaussの発散定理  
境界条件( $S_i$ )  
 $\eta^s$  関数の境界条件

$\int_V \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \eta_i^s dV = \int_V \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \eta_i^s dV - \int_V \hat{\sigma}_{ij} \frac{\partial \eta_i^s}{\partial x_j} dV$

$= \int_S n_j \hat{\sigma}_{ij} \eta_i^s dS - \int_V \hat{\sigma}_{ij} \frac{\partial \eta_i^s}{\partial x_j} dV$

$= \int_S n_j \hat{\sigma}_{ij} \eta_i^s dS - \int_V \hat{\sigma}_{ij} \frac{\partial \eta_i^s}{\partial x_j} dV$

$= \int_S t_i \eta_i^s dS - \int_V \hat{\sigma}_{ij} \frac{\partial \eta_i^s}{\partial x_j} dV$

応力の対称性

$\int_V \hat{\sigma}_{ij} \frac{\partial \eta_i^s}{\partial x_j} dV = \int_S t_i \eta_i^s dS$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 3. 弱形式化(2)

$\int_V \hat{\sigma}_{ij} \frac{\partial \eta_i^s}{\partial x_j} dV = \int_S t_i \eta_i^s dS$

$\dot{\sigma}_{ij} \frac{\partial \eta_i^s}{\partial x_j} = \dot{\sigma}_{ij} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_j^s}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta_i^s}{\partial x_j} - \frac{\partial \eta_j^s}{\partial x_i} \right) \right\}$

対称テンソル      反対称テンソル

$= \dot{\sigma}_{ij} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_j^s}{\partial x_i} \right) \right\}$

応力分相式

$\int_V \delta \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\sigma}_{ij} dV = \int_S t_i \eta_i^s dS$

構成関係

$\int_V \delta \dot{\epsilon}_{ij} D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} dV = \int_S t_i \eta_i^s dS$

任意関数によって定義される2階のテンソル  
任意関数を仮想な変位速度と呼ぶと、  
仮想ひずみ速度と名づけることもできる。

$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} + \dot{u}^w \delta_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij}$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 3. 弱形式化(3)

【飽和地盤の変形問題②】

積分方程式

$$\int_V \delta \dot{\epsilon}_{ij} D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} dV = \int_S t_i \eta_i^s dS$$

が満足するように、初期条件・境界条件

$x_i(\mathbf{X}, t=0) = x_i^0$        $\sigma_{ij}(\mathbf{X}, t=0) = \sigma_{ij}^0$

$v_i^s = v_i^{s*}$  ( $S_V$  上において)

の下で解け。ただし、

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right) \quad \delta \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_j^s}{\partial x_i} \right)$$

とする。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 3. 弱形式化(4)

$$\dot{\epsilon}_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k^s}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l^s}{\partial x_k} \right) \quad \delta \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_j^s}{\partial x_i} \right)$$

$\{\dot{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{33} \\ \dot{\gamma}_{12} \\ \dot{\gamma}_{23} \\ \dot{\gamma}_{31} \end{Bmatrix}$

$\{\delta \dot{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \delta \dot{\epsilon}_{11} \\ \delta \dot{\epsilon}_{22} \\ \delta \dot{\epsilon}_{33} \\ \delta \dot{\gamma}_{12} \\ \delta \dot{\gamma}_{23} \\ \delta \dot{\gamma}_{31} \end{Bmatrix}$

$\delta \dot{\epsilon}_{ij} D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} = \{\delta \dot{\epsilon}\}^T [\mathbf{D}] \{\dot{\epsilon}\}$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 3. 弱形式化(5)

【飽和地盤の変形問題②】

積分方程式

$$\int_V \{\delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^T [\mathbf{D}] \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} dV = \int_{S_t} \dot{t}_i^* \eta_i^s dS$$

が満足するように、初期条件・境界条件

$$x_i(\mathbf{X}, t=0) = x_i^0 \quad \sigma_{ij}(\mathbf{X}, t=0) = \sigma_{ij}^0$$

$$v_i^s = v_i^{s*} \quad (S_v \text{ 上において})$$

の下で解け。ただし、

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} \right) \quad \delta \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta_j^s}{\partial x_i} + \frac{\partial \eta_i^s}{\partial x_j} \right)$$

とする。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 4. 有限要素定式化

$$\int_V \{\delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^T [\mathbf{D}] \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} dV = \sum_{m=1}^M \int_{V_m^e} \{\delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^T [\mathbf{D}] \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} dV$$

$$\int_{S_t} \dot{t}_i^* \eta_i^s dS = \sum_{m=1}^M \int_{S_m^e} \dot{t}_i^* \eta_i^s dS$$

【飽和地盤の変形問題③】

積分方程式

$$\sum_{m=1}^M \int_{V_m^e} \{\delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^T [\mathbf{D}] \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} dV = \sum_{m=1}^M \int_{S_m^e} \dot{t}_i^* \eta_i^s dS$$

を、初期条件・境界条件

$$x_i(\mathbf{X}, t=0) = x_i^0 \quad \sigma_{ij}(\mathbf{X}, t=0) = \sigma_{ij}^0 \quad v_i^s = v_i^{s*} \quad (S_v \text{ 上において})$$

の下で解け。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 4. 有限要素定式化(2)

要素  $m$  について、要素内の変位速度と任意関数の分布をアイソパラメトリック要素として近似

$$\mathbf{v}^s(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{N_m^e} N_i(\xi, \eta) \mathbf{v}_i^s = [\mathbf{N}] \{\mathbf{v}^e\} \quad \boldsymbol{\eta}^s(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{N_m^e} N_i(\xi, \eta) \boldsymbol{\eta}_i^s = [\mathbf{N}] \{\boldsymbol{\eta}^e\}$$

2次元アイソパラメトリック4節点四角形要素の場合

$$\begin{Bmatrix} v_x^s \\ v_y^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^s \\ v_2^s \\ v_3^s \\ v_4^s \end{Bmatrix}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 4. 有限要素定式化(3)

要素  $m$  について、要素内の変位速度と任意関数の分布をアイソパラメトリック要素として近似

$$\mathbf{v}^s(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{N_m^e} N_i(\xi, \eta) \mathbf{v}_i^s = [\mathbf{N}] \{\mathbf{v}^e\} \quad \boldsymbol{\eta}^s(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{N_m^e} N_i(\xi, \eta) \boldsymbol{\eta}_i^s = [\mathbf{N}] \{\boldsymbol{\eta}^e\}$$

このとき、

$$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\mathbf{B}_m] \{\mathbf{v}^e\} \quad \{\delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\mathbf{B}_m] \{\delta \mathbf{v}^e\}$$

$$\sum_{m=1}^M \int_{V_m^e} \{\delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^T [\mathbf{D}] \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} dV = \sum_{m=1}^M \int_{V_m^e} \{\boldsymbol{\eta}^s\}^T [\mathbf{B}_m]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_m] \{\mathbf{v}^s\} dV$$

$$= \sum_{m=1}^M \{\boldsymbol{\eta}^s\}^T \left( \int_{V_m^e} [\mathbf{B}_m]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_m] dV \right) \{\mathbf{v}^s\}$$

$$\sum_{m=1}^M \int_{S_m^e} \dot{t}_i^* \eta_i^s dS = \sum_{m=1}^M \int_{S_m^e} \{\boldsymbol{\eta}^s\}^T \{\dot{\mathbf{t}}^*\} dS = \sum_{m=1}^M \int_{S_m^e} \{\boldsymbol{\eta}^s\}^T [\mathbf{N}^T] \{\dot{\mathbf{t}}^*\} dS$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 4. 有限要素定式化(4)

要素 \$m\$ について、要素内の水頭と任意関数の分布をアイソパラメトリック要素として近似

$$\sum_{m=1}^M \int_{V_m^e} \{\delta \mathbf{e}\}^T [\mathbf{D}] \{\mathbf{e}\} dV = \sum_{m=1}^M \int_{S_m^e} \mathbf{t}^* \boldsymbol{\eta}^s dS$$

$$\sum_{m=1}^M \{\boldsymbol{\eta}^s\}^T \left( \int_{V_m^e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \right) \{\mathbf{v}^s\} = \sum_{m=1}^M \int_{S_m^e} \{\boldsymbol{\eta}^s\}^T [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{t}^*\} dS$$

節点の水頭および任意関数値を全体系として表示

$$\{\boldsymbol{\eta}^s\}^T \left( \sum_{m=1}^M \int_{V_m^e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \right) \{\mathbf{v}^s\} = \{\boldsymbol{\eta}^s\}^T \left( \sum_{m=1}^M \int_{S_m^e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{t}^*\} dS \right)$$

節点においていかなる任意関数に対しても成立

$$\left( \sum_{m=1}^M \int_{V_m^e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \right) \{\mathbf{v}^s\} = \left( \sum_{m=1}^M \int_{S_m^e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{t}^*\} dS \right)$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 4. 有限要素定式化(5)

【飽和地盤の変形問題④】

連立方程式  $[\mathbf{K}]\{\mathbf{v}^s\} = \{\mathbf{f}_p\}$  を、境界条件  $\{\mathbf{v}^s\} = \{\mathbf{v}^{s*}\}$  の下で解け。

ここに、

$$[\mathbf{K}] = \sum_{m=1}^M [\mathbf{K}_m^e] \quad \{\mathbf{f}_p\} = \sum_{m=1}^M \{\mathbf{f}_p^e\}$$

$$[\mathbf{K}_m^e] = \int_{V_m^e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \quad \{\mathbf{f}_p^e\} = \int_{S_m^e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{t}^*\} dS$$

$[\mathbf{K}]$  全体剛性マトリックス  
 $\{\mathbf{f}_p\}$  全体節点外カベクトル  
 $[\mathbf{K}_m^e]$  要素剛性マトリックス  
 $\{\mathbf{f}_p^e\}$  要素節点外カベクトル

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 4. 有限要素定式化(6)

【D-matrixについて】  $[\mathbf{K}_m^e] = \int_{V_m^e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV$

2次元平面ひずみ状態

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}'_{11} \\ \dot{\sigma}'_{22} \\ \dot{\sigma}'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1112} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2212} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\gamma}_{12} \end{Bmatrix}$$

等方線形弾性体

$$D_{ijkl} = E_{ij} = \left( K - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$D_{1111} = D_{2222} = \left( K - \frac{2}{3}G \right) \times 1 \times 1 + G(1 \times 1 + 1 \times 1) = K - \frac{2}{3}G + 2G = K + \frac{4}{3}G$$

$$D_{1122} = D_{2211} = \left( K - \frac{2}{3}G \right) \times 1 \times 1 + G(0 \times 0 + 0 \times 0) = K - \frac{2}{3}G$$

$$D_{1112} = D_{1211} = D_{1222} = D_{2212} = \left( K - \frac{2}{3}G \right) \times 1 \times 0 + G(1 \times 0 + 0 \times 1) = 0$$

$$D_{1212} = \left( K - \frac{2}{3}G \right) \times 0 \times 0 + G(1 \times 1 + 0 \times 0) = G$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 4. 有限要素定式化(7)

【D-matrixについて】  $[\mathbf{K}_m^e] = \int_{V_m^e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV$

2次元平面ひずみ状態

弾塑性体 (Cam-Clayモデル、修正Cam-Clayモデル)

$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{D}^e] - [\mathbf{D}^p]$$

$$[\mathbf{D}^e] = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

Cam-Clayモデル

$$A = K(M - \eta')^2 + 3G + (M - \eta')p' + q \left\{ \frac{1}{D_c} (M - \eta') \right\}$$

$$B = K(M - \eta') \quad C = 3G/q$$

修正Cam-Clayモデル

$$A = K(M^2 - \eta'^2) + 12G\eta'^2 + (M^2 - \eta'^2)p' + 2q\eta' \left\{ \frac{1}{D_c} (M^2 - \eta'^2) \right\}$$

$$B = K(M^2 - \eta'^2) \quad C = 6G/p'$$

$$[\mathbf{D}^p] = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} (B + Cs_{11})^2 & (B + Cs_{11})(B + Cs_{22}) & (B + Cs_{11})Cs_{12} \\ (B + Cs_{11})(B + Cs_{22}) & (B + Cs_{22})^2 & (B + Cs_{22})Cs_{12} \\ (B + Cs_{11})Cs_{12} & (B + Cs_{22})Cs_{12} & (Cs_{12})^2 \end{bmatrix}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 4. 有限要素定式化(8)

【D-matrixについて】

$$[K_m^e] = \int_{V_m} [B]^T [D] [B] dV$$

2次元平面ひずみ状態

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}'_{11} \\ \dot{\sigma}'_{22} \\ \dot{\sigma}'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1112} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2212} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\gamma}_{12} \end{Bmatrix}$$

ポイントは、上のように表すことができる構成関係(応力～ひずみ関係)であれば、弾性、弾塑性など、材料の力学モデルにかかわらず、利用することができる。

3次元状態でも、同じ

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 要素剛性マトリクスの作成(数値積分)

$$[K_m^e] = \int_{V_m} [B]^T [D] [B] dV$$

全体座標系→局所座標系

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta$$

Gaussの数値積分

$$= \sum_{i_G=1}^{n_G} k_m \omega_{i_G} \omega_{i_G} [B]^T [D] [B] \det(\mathbf{J})$$

アイソパラメトリック四角形要素  
1点積分の場合

- 節点
- × 積分点  $(\xi_{i_G}, \eta_{i_G}) = (0, 0)$   
 $\omega_{i_G} = 2.0$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 5. 有限要素法による計算の実行

```

    graph TD
      A[初期条件] --> B[要素剛性マトリクスの作成  
B-Matrix, D-Matrix]
      B --> C[全体剛性マトリクスの作成]
      C --> D[節点外力ベクトルの作成(境界条件)]
      D --> E[連立方程式の解(節点変位速度)]
      E --> F[時間増分による変位量の計算]
      F --> G[ひずみ増分の計算]
      G --> H[応力増分の計算]
      H --> I[応力パラメータの更新]
      I --> J[end]
      I --> B
  
```

$$\{\sigma'_i\}$$

$$[K_m^e] = \int_{V_m} [B]^T [D] [B] dV$$

$$[K] = \sum_{m=1}^M [K_m^e]$$

$$\{f_p\} = \sum_{m=1}^M \{f_p^e\}$$

$$[K] \{v^s\} = \{f_p\}$$

$$\{u_{t+\delta t}^s\} = \{u_t^s\} + \{v^s\} \times \delta t$$

$$\{\dot{\epsilon}\} = [B] \{v^s\} \quad \{\epsilon_{t+\delta t}\} = \{\epsilon_t\} + \{\dot{\epsilon}\} \times \delta t$$

$$\{\dot{\sigma}'\} = [D] \{\dot{\epsilon}\} \quad \{\sigma'_{t+\delta t}\} = \{\sigma'_t\} + \{\dot{\sigma}'\} \times \delta t$$

$$\{\dot{u}^v\} = \{0\} \quad \{\sigma'_{t+\delta t}\} = \{\sigma'_t\} + \{\dot{\sigma}'\} \times \delta t$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 6. まとめ

- 微分方程式の境界値問題を弱形定式化して有限要素定式化する流れは、浸透問題と同じ
- 要素の力学特性は、D-matrixの部分のみに与えられる。D-matrixの形式で表されるものは、弾性体であれ、弾塑性体であれ、どんな材料特性をもってもよい。
- 地盤の変形解析は、一般に、増分計算により行われる。1ステップずつ計算して、応力、ひずみ、変位の値を更新し、計算を継続することによって、最終的な答えが得られる。これは、地盤材料が非線形な応力～ひずみ関係を示すので仕方がない。