地盤数値解析学特論
Advanced
Geotechnical
Numerical Analysis

防災・環境地盤工学研究室
村上　哲
murakami@mx.ibaraki.ac.jp

5.　浸透問題

- 1．飽和地盤の浸透問題において満足すべき関係式
- 2．解くべき微分方程式の境界値問題
- 3．弱形定式化
- 4．有限要素定式化
  - 要素透水マトリクスの作成（数値積分）
- 5.例題

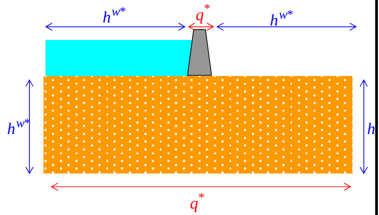
1．飽和地盤の浸透問題において満足すべき関係式

基本則：
質量保存則：（連続の式）　$\frac{\partial v_i^w}{\partial x_i} = 0$
運動量保存則：（力の釣合い式）　常に満足

境界条件：
水頭境界：　$h^w = h^{w*}$　（ S_h 上において）
流量境界：　$n_i v_i^w = -q^*$　（ S_q 上において）

初期条件：（不要、定常問題なので）

諸関係式：
ダルシー則：　$v_i^w = -k \frac{\partial h^w}{\partial x_i}$



2．解くべき微分方程式の境界値問題

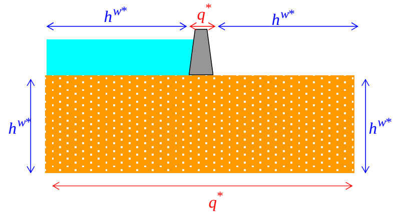
【飽和地盤の浸透問題①】

偏微分方程式

$$\frac{\partial v_i^w}{\partial x_i} = 0$$

を、次の関係式

$$v_i^w = -k \frac{\partial h^w}{\partial x_i}$$



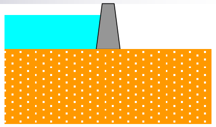
が満足するように，境界条件

$h^w = h^{w*}$　（ S_h 上において）　$n_i v_i^w = -q^*$　（ S_q 上において）

の下で解け。

3. 弱形定式化

【飽和地盤の浸透問題①】に対して，弱形式を誘導



偏微分方程式： $\dfrac{\partial v_i^w}{\partial x_i} = 0$

η^w を乗じて体積積分を施す

任意のスカラー関数 η^w

ただし、$\eta^w = 0$ （ S_h 上において）

$$\int_V \frac{\partial v_i^w}{\partial x_i}\eta^w dV = 0$$

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\partial v_i^w}{\partial x_i}\eta^w dV &= \int_V \frac{\partial v_i^w \eta^w}{\partial x_i} dV - \int_V v_i^w \frac{\partial \eta^w}{\partial x_i} dV \\ &= \int_S v_i^w n_i \eta^w dS - \int_V v_i^w \frac{\partial \eta^w}{\partial x_i} dV \\ &= \int_{S_q} v_i^w n_i \eta^w dS - \int_V v_i^w \frac{\partial \eta^w}{\partial x_i} dV \\ &= -\int_{S_q} q^* \eta^w dS - \int_V v_i^w \frac{\partial \eta^w}{\partial x_i} dV\end{aligned}$$

部分積分の公式、
Gaussの発散定理
境界条件(S_q)
η^w 関数の境界条件

$$\int_{Sq} q^* \eta^w dS + \int_V v_i^w \frac{\partial \eta^w}{\partial x_i} dV = 0$$

ダルシー則を適用

$$\int_V k \frac{\partial h^w}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^w}{\partial x_i} dV = \int_{Sq} q^* \eta^w dS$$

3. 弱形定式化(2)

【飽和地盤の浸透問題②】

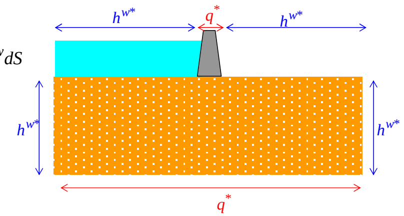
積分方程式

$$\int_V k \frac{\partial h^w}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^w}{\partial x_i} dV = \int_{Sq} q^* \eta^w dS$$

を、境界条件

$h^w = h^{w*}$ （ S_h 上において）

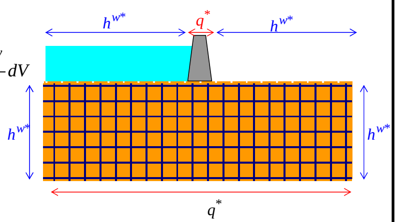
の下で解け。



4. 有限要素定式化

$$\int_V k \frac{\partial h^w}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^w}{\partial x_i} dV = \sum_{m=1}^{M} \int_{V_m^e} k \frac{\partial h^w}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^w}{\partial x_i} dV$$

$$\int_{Sq} q^* \eta^w dS = \sum_{m=1}^{M} \int_{Sq_m^e} q^* \eta^w dS$$



【飽和地盤の浸透問題②】

積分方程式

$$\sum_{m=1}^{M} \int_{V_m^e} k \frac{\partial h^w}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^w}{\partial x_i} dV = \sum_{m=1}^{M} \int_{Sq_m^e} q^* \eta^w dS$$

を、境界条件

$h^w = h^{w*}$ （ S_h 上において）

の下で解け。

4. 有限要素定式化(2)

要素mについて、要素内の水頭と任意関数の分布をアイソパラメタリック要素として近似

$$h^w(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{N_m^e} N_i(\xi,\eta) h_i^w = [\mathbf{N}_m]\{\mathbf{h}^{w^e}\} \qquad \eta^w(\xi,\eta) = [\mathbf{N}_m]\{\boldsymbol{\eta}^{w^e}\}$$

このとき、 $\left\{\dfrac{\partial h^w}{\partial \mathbf{x}}\right\} = [\mathbf{B}_m^w]\{\mathbf{h}^{w^e}\}$ $\qquad \left\{\dfrac{\partial \eta^w}{\partial \mathbf{x}}\right\} = [\mathbf{B}_m^w]\{\boldsymbol{\eta}^{w^e}\}$

$$\sum_{m=1}^{M} \int_{V_m^e} k \frac{\partial h^w}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^w}{\partial x_i} dV = \sum_{m=1}^{M} \int_{Sq_m^e} q^* \eta^w dS$$

【左辺】

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{M} \int_{V_m^e} k \frac{\partial h^w}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^w}{\partial x_i} dV &= \sum_{m=1}^{M} \int_{V_m^e} k \{\boldsymbol{\eta}^{w^e}\}^T [\mathbf{B}_m^w]^T [\mathbf{B}_m^w] \{\mathbf{h}^{w^e}\} dV \\ &= \sum_{m=1}^{M} \{\boldsymbol{\eta}^{w^e}\}^T \left(\int_{V_m^e} k [\mathbf{B}_m^w]^T [\mathbf{B}_m^w] dV \right) \{\mathbf{h}^{w^e}\}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial h^w}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^w}{\partial x_i} = \left\{\frac{\partial \eta^w}{\partial \mathbf{x}}\right\}^T \left\{\frac{\partial h^w}{\partial \mathbf{x}}\right\} = \{\boldsymbol{\eta}^{w^e}\}^T [\mathbf{B}_m^w]^T [\mathbf{B}_m^w] \{\mathbf{h}^{w^e}\}$$

【右辺】

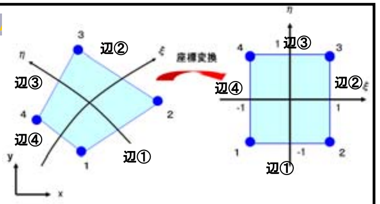
$$\sum_{m=1}^{M} \int_{Sq_m^e} q^* \eta^w dS = \sum_{m=1}^{M} \left\{ \{\boldsymbol{\eta}^{w^e}\}^T \sum_{k=1}^{4} \int_{Sq_m^{e\,k}} [\hat{\mathbf{N}}^k]^T [\hat{\mathbf{N}}^k] \{\mathbf{q}_m^{*k}\} dS \right\}$$

Advanced Geotechnical Numerical

二次元問題の有限要素

■ アイソパラメタリック

四角形要素（4節点）



$$x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)x_i$$

$$y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)y_i$$

四角形要素辺上における補間関数は？

$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$

$N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$

$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$

$N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$

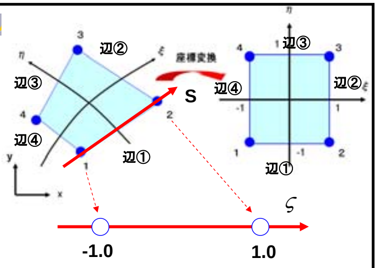
辺①	辺②	辺③	辺④
$N_1=\frac{1}{2}(1-\xi)$	$N_1=0$	$N_1=0$	$N_1=\frac{1}{2}(1-\eta)$
$N_2=\frac{1}{2}(1+\xi)$	$N_2=\frac{1}{2}(1-\eta)$	$N_2=0$	$N_2=0$
$N_3=0$	$N_3=\frac{1}{2}(1+\eta)$	$N_3=\frac{1}{2}(1+\xi)$	$N_3=0$
$N_4=0$	$N_4=0$	$N_4=\frac{1}{2}(1-\xi)$	$N_4=\frac{1}{2}(1+\eta)$

Advanced Geotechnical Numerical

二次元問題の有限要素

■ アイソパラメタリック

四角形要素（4節点）



辺に着目した場合。。。。

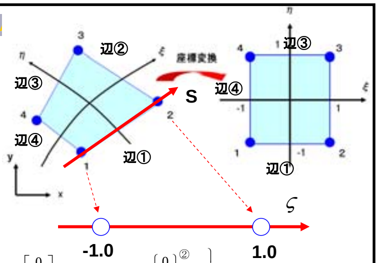
$$S(\varsigma)=\sum_{i=1}^{4}\hat{N}_i(\varsigma)S_i$$

$$\hat{N}_1=\frac{1}{2}(1-\varsigma)$$

$$\hat{N}_2=\frac{1}{2}(1+\varsigma)$$

辺①	辺②	辺③	辺④
$N_1=\frac{1}{2}(1-\varsigma)$	$N_1=0$	$N_1=0$	$N_1=\frac{1}{2}(1+\varsigma)$
$N_2=\frac{1}{2}(1+\varsigma)$	$N_2=\frac{1}{2}(1-\varsigma)$	$N_2=0$	$N_2=0$
$N_3=0$	$N_3=\frac{1}{2}(1+\varsigma)$	$N_3=\frac{1}{2}(1-\varsigma)$	$N_3=0$
$N_4=0$	$N_4=0$	$N_4=\frac{1}{2}(1+\varsigma)$	$N_4=\frac{1}{2}(1-\varsigma)$

Advanced Geotechnical Numerical



$$\int_{Sq_m^e} q^*\eta^w dS=\int_{Sq_m^e}\left\{\boldsymbol{\eta}^{w^e}\right\}^T\left[\mathbf{N}_m\right]^T q^* dS$$

$$=\left\{\boldsymbol{\eta}^{w^e}\right\}^T\int_{Sq_m^e}\left[\mathbf{N}_m\right]^T q^* dS$$

$$=\left\{\boldsymbol{\eta}^{w^e}\right\}^T\left\{\int_{Sq_m^e}\begin{bmatrix}\hat{N}_1\\ \hat{N}_2\\ \hat{N}_3\\ \hat{N}_4\end{bmatrix}q^* dS\right\}$$

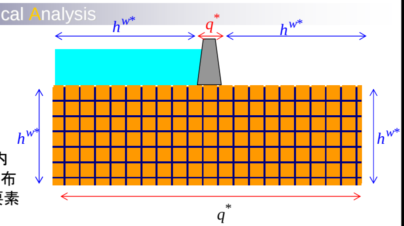
$$=\left\{\boldsymbol{\eta}^{w^e}\right\}^T\left[\left\{\int_{Sq_m^{e①}}\begin{bmatrix}\hat{N}_1\\ \hat{N}_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{N}_1 & \hat{N}_2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1^*\\ q_2^*\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}^{①} dS\right\}+\left\{\int_{Sq_m^{e②}}\begin{bmatrix}0\\ \hat{N}_1\\ \hat{N}_2\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \hat{N}_1 & \hat{N}_2 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ q_2^*\\ q_3^*\\ 0\end{Bmatrix}^{②} dS\right\}\right.$$

$$\left.+\left\{\int_{Sq_m^{e③}}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \hat{N}_1\\ \hat{N}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \hat{N}_1 & \hat{N}_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ q_3^*\\ q_4^*\end{Bmatrix}^{③} dS\right\}+\left\{\int_{Sq_m^{e④}}\begin{bmatrix}\hat{N}_2\\ 0\\ 0\\ \hat{N}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{N}_2 & 0 & 0 & \hat{N}_1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1^*\\ 0\\ 0\\ q_4^*\end{Bmatrix}^{④} dS\right\}\right]$$

$$=\left\{\boldsymbol{\eta}^{w^e}\right\}^T\sum_{k=1}^{4}\int_{Sq_m^{e\,k}}\left[\hat{\mathbf{N}}^k\right]^T\left[\hat{\mathbf{N}}^k\right]\left\{\mathbf{q}_m^{*k}\right\}dS$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

4. 有限要素定式化(3)



$$\boxed{\sum_{m=1}^{M}\int_{V_m^e}k\frac{\partial h^w}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^w}{\partial x_i}dV=\sum_{m=1}^{M}\int_{Sq_m^e}q^*\eta^w dS}$$

要素mについて、要素内の水頭と任意関数の分布をアイソパラメタリック要素として近似

$$\sum_{m=1}^{M}\left\{\boldsymbol{\eta}^{w^e}\right\}^T\left(\int_{V_m^e}k\left[\mathbf{B}_m^w\right]^T\left[\mathbf{B}_m^w\right]dV\right)\left\{\mathbf{h}^{w^e}\right\}=\sum_{m=1}^{M}\left\{\left\{\boldsymbol{\eta}^{w^e}\right\}^T\sum_{k=1}^{4}\int_{Sq_m^{e\,k}}\left[\hat{\mathbf{N}}^k\right]^T\left[\hat{\mathbf{N}}^k\right]\left\{\mathbf{q}_m^{*k}\right\}dS\right\}$$

節点の水頭および任意関数値を全体系として表示

$$\left\{\boldsymbol{\eta}^{w}\right\}^T\left(\sum_{m=1}^{M}\left(\int_{V_m^e}k\left[\mathbf{B}_m^w\right]^T\left[\mathbf{B}_m^w\right]dV\right)\right)\left\{\mathbf{h}^{w}\right\}=\left\{\boldsymbol{\eta}^{w}\right\}^T\left(\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{4}\int_{Sq_m^{e\,k}}\left[\hat{\mathbf{N}}^k\right]^T\left[\hat{\mathbf{N}}^k\right]\left\{\mathbf{q}_m^{*k}\right\}dS\right)$$

節点においていかなる任意関数に対しても成立

$$\boxed{\left(\sum_{m=1}^{M}\left(\int_{V_m^e}k\left[\mathbf{B}_m^w\right]^T\left[\mathbf{B}_m^w\right]dV\right)\right)\left\{\mathbf{h}^{w}\right\}=\left(\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{4}\int_{Sq_m^{e\,k}}\left[\hat{\mathbf{N}}^k\right]^T\left[\hat{\mathbf{N}}^k\right]\left\{\mathbf{q}_m^{*k}\right\}dS\right)}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

4. 有限要素定式化(4)

【飽和地盤の浸透問題③】

連立方程式 $[\mathbf{K}]\{\mathbf{h}^w\}=\{\mathbf{f}_q\}$ を、境界条件 $\{\mathbf{h}^w\}=\{\mathbf{h}^{w*}\}$ の下で解け。

ここに、

$$[\mathbf{K}]=\sum_{m=1}^{M}\left[\mathbf{K}_m^e\right] \qquad \{\mathbf{f}_q\}=\sum_{m=1}^{M}\{\mathbf{f}_q^e\}$$

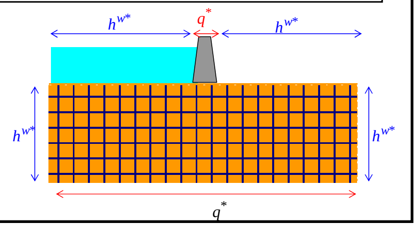
$$\left[\mathbf{K}_m^e\right]=\int_{V_m^e}k\left[\mathbf{B}_m^w\right]^T\left[\mathbf{B}_m^w\right]dV \qquad \{\mathbf{f}_q^e\}=\sum_{k=1}^{4}\int_{Sq_m^{e\,k}}\left[\hat{\mathbf{N}}^k\right]^T\left[\hat{\mathbf{N}}^k\right]\{\mathbf{q}_m^{*k}\}dS$$

$[\mathbf{K}]$ 全体透水マトリックス

$\{\mathbf{f}_q\}$ 全体流量フラックスベクトル

$\left[\mathbf{K}_m^e\right]$ 要素透水マトリックス

$\{\mathbf{f}_q^e\}$ 要素流量フラックスベクトル



Advanced Geotechnical Numerical Analysis

要素透水マトリクスの作成（数値積分）

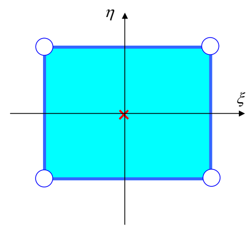
$$\left[\mathbf{K}_m^e\right]=\int_{V_m^e}k_m\left[\mathbf{B}_m^w\right]^T\left[\mathbf{B}_m^w\right]dV$$

全体座標系→局所座標系

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k_m\left[\mathbf{B}_m^w\right]^T\left[\mathbf{B}_m^w\right]\det(\mathbf{J})\,d\xi d\eta$$

Gaussの数値積分

$$=\sum_{i_G=1}^{n_G}k_m\omega_{i_G}\omega_{i_G}\left[\mathbf{B}_m^w\right]^T\left[\mathbf{B}_m^w\right]\det(\mathbf{J})$$



アイソパラメタリック四角形要素
１点積分の場合

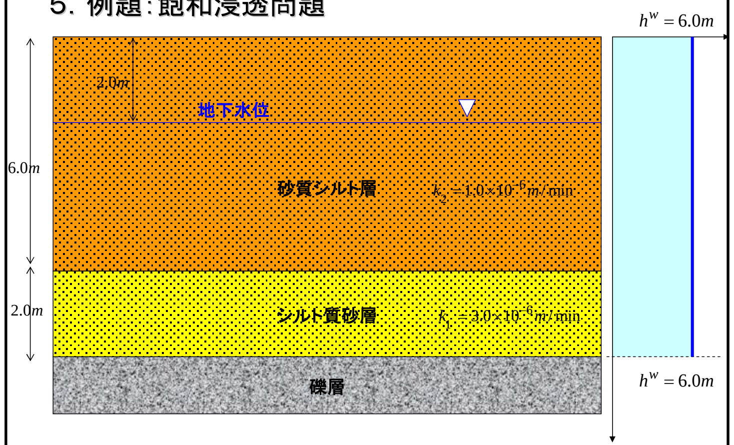
○ 節点

× 積分点 $\left(\xi_{i_G},\eta_{i_G}\right)=(0,0)$

$\omega_{i_G}=2.0$

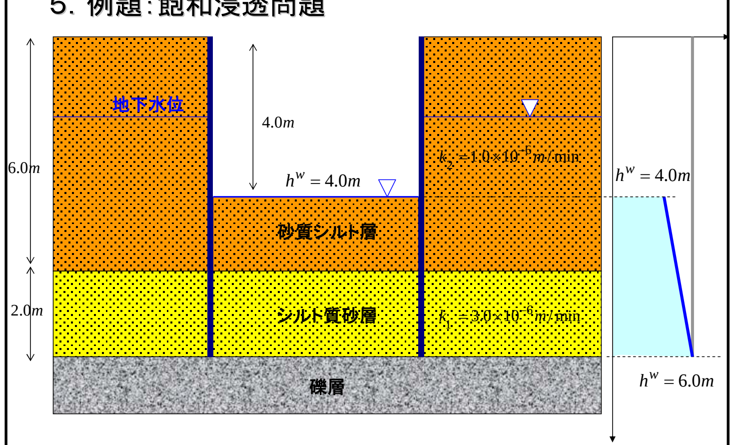
Advanced Geotechnical Numerical Analysis

5. 例題：飽和浸透問題



Advanced Geotechnical Numerical Analysis

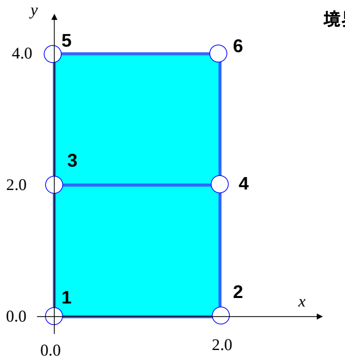
5. 例題：飽和浸透問題



Advanced Geotechnical Numerical Analysis

例題：飽和浸透問題

■ ①有限要素分割と境界条件の設定



境界条件

水頭境界

$$h_1^{w*} = h_2^{w*} = 4.0m$$

$$h_5^{w*} = h_6^{w*} = 0.0m$$

流量境界

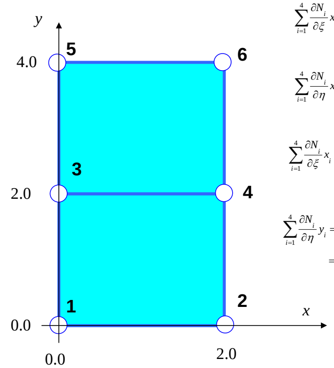
1-3-5面　　2-4-6面

$$n_i v_i^w = -q^* = 0.0$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

例題：飽和浸透問題

■ ②要素透水行列の作成



1)Jacobianマトリックスの作成

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}x_i = \left\{-\frac{1}{4}(1-\eta_{iG})x_1\right\} + \left\{\frac{1}{4}(1-\eta_{iG})x_2\right\} + \left\{\frac{1}{4}(1+\eta_{iG})x_3\right\} + \left\{-\frac{1}{4}(1+\eta_{iG})x_4\right\}$$
$$= \frac{1}{4}(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4) = \frac{1}{2}L$$

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}x_i = \left\{-\frac{1}{4}(1-\xi_{iG})x_1\right\} + \left\{-\frac{1}{4}(1+\xi_{iG})x_2\right\} + \left\{\frac{1}{4}(1+\xi_{iG})x_3\right\} + \left\{\frac{1}{4}(1-\xi_{iG})x_4\right\}$$
$$= \frac{1}{4}(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}x_i = \left\{-\frac{1}{4}(1-\eta_{iG})y_1\right\} + \left\{\frac{1}{4}(1-\eta_{iG})y_2\right\} + \left\{\frac{1}{4}(1+\eta_{iG})y_3\right\} + \left\{-\frac{1}{4}(1+\eta_{iG})y_4\right\}$$
$$= \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4) = 0$$

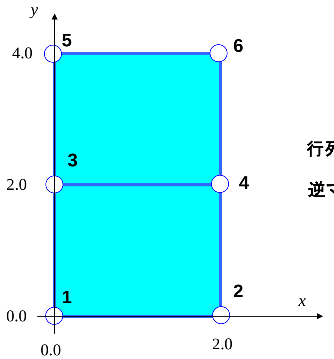
$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}y_i = \left\{-\frac{1}{4}(1-\xi_{iG})y_1\right\} + \left\{-\frac{1}{4}(1+\xi_{iG})y_2\right\} + \left\{\frac{1}{4}(1+\xi_{iG})y_3\right\} + \left\{\frac{1}{4}(1-\xi_{iG})y_4\right\}$$
$$= \frac{1}{4}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4) = \frac{1}{2}L$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}x_i & \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}x_i \\ \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}y_i & \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}y_i \end{bmatrix} = \frac{L}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

例題：飽和浸透問題

■ ②要素透水行列の作成



2)Jacobianマトリックスの逆マトリックス

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}x_i & \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}x_i \\ \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}y_i & \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}y_i \end{bmatrix} = \frac{L}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行列式： $\det|\mathbf{J}| = \dfrac{L^2}{4}$

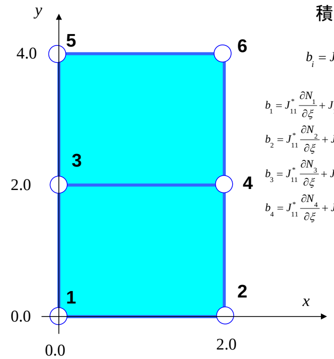
逆マトリックス：

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^* = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} = \frac{2}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

例題：飽和浸透問題

■ ②要素透水行列の作成



3)B-Matrix

積分点における値

$$b_i = J_{11}^*\frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{12}^*\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \qquad c_i = J_{21}^*\frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{22}^*\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

$$b_1 = J_{11}^*\frac{\partial N_1}{\partial \xi} + J_{12}^*\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \frac{2}{L}\left(-\frac{1}{4}\right) + 0 = -\frac{1}{2L} \qquad c_1 = J_{21}^*\frac{\partial N_1}{\partial \xi} + J_{22}^*\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = 0 + \frac{2}{L}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2L}$$
$$b_2 = J_{11}^*\frac{\partial N_2}{\partial \xi} + J_{12}^*\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = \frac{2}{L}\left(+\frac{1}{4}\right) + 0 = \frac{1}{2L} \qquad c_2 = J_{21}^*\frac{\partial N_2}{\partial \xi} + J_{22}^*\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = 0 + \frac{2}{L}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2L}$$
$$b_3 = J_{11}^*\frac{\partial N_3}{\partial \xi} + J_{12}^*\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{2}{L}\left(+\frac{1}{4}\right) + 0 = \frac{1}{2L} \qquad c_3 = J_{21}^*\frac{\partial N_3}{\partial \xi} + J_{22}^*\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = 0 + \frac{2}{L}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2L}$$
$$b_4 = J_{11}^*\frac{\partial N_4}{\partial \xi} + J_{12}^*\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{2}{L}\left(-\frac{1}{4}\right) + 0 = -\frac{1}{2L} \qquad c_4 = J_{21}^*\frac{\partial N_4}{\partial \xi} + J_{22}^*\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = 0 + \frac{2}{L}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2L}$$

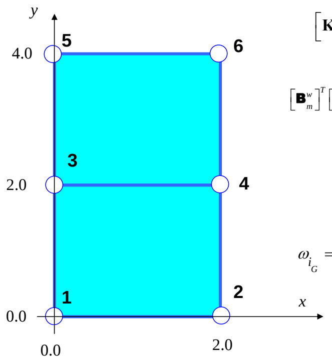
$$\left[\mathbf{B}^w\right] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2L}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

例題：飽和浸透問題

■ ②要素透水行列の作成

4)要素透水マトリックス



$$\left[\mathbf{K}_m^e\right]=\sum_{i_G=1}^{n_G} k_m \omega_{i_G}\omega_{i_G}\left[\mathbf{B}_m^w\right]^T\left[\mathbf{B}_m^w\right]\det\left|\mathbf{J}\right|$$

$$\left[\mathbf{B}_m^w\right]^T\left[\mathbf{B}_m^w\right]=\frac{1}{4L^2}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\\ -1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4L^2}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 2 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{2L^2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

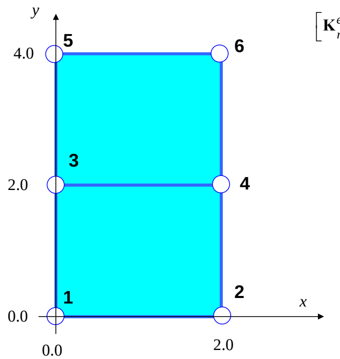
$$\omega_{i_G}=2.0 \qquad \det\left|\mathbf{J}\right|=\frac{L^2}{4}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

例題：飽和浸透問題

■ ②要素透水行列の作成

4)要素透水マトリックス（つづき）



$$\left[\mathbf{K}_m^e\right]=\sum_{i_G=1}^{n_G} k_m \omega_{i_G}\omega_{i_G}\left[\mathbf{B}_m^w\right]^T\left[\mathbf{B}_m^w\right]\det\left|\mathbf{J}\right|$$

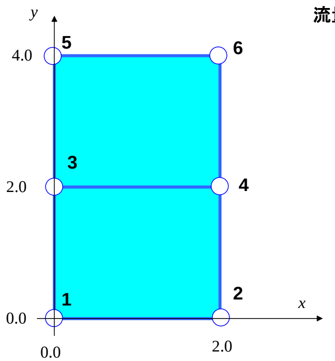
$$=k_m\times 2.0\times 2.0\times\frac{1}{2L^2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\frac{L^2}{4}$$

$$\boxed{\left[\mathbf{K}_m^e\right]=\frac{k_m}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

例題：飽和浸透問題

■ ③要素流量フラックスベクトルの作成



流量境界

1-3-5面　　2-4-6面

$$n_i v_i^w=-q^*=0.0$$

$$\boxed{\left\{\mathbf{f}_q^e\right\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

例題：飽和浸透問題

■ ④全体透水マトリックスの作成

$$\left[\mathbf{K}_1^e\right]=\frac{k_1}{2}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1 & 2 & 4 & 3\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ 4\\ 3\end{array} \qquad \left[\mathbf{K}_2^e\right]=\frac{k_2}{2}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}3 & 4 & 6 & 5\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ 3\\ 4\\ 6\\ 5\end{array}$$

$$\left[\mathbf{K}\right]=\frac{1}{2}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{array}\\ \begin{bmatrix}k_1 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 & 0\\ -k_1 & 0 & k_1+k_2 & 0 & -k_2 & 0\\ 0 & -k_1 & 0 & k_1+k_2 & 0 & -k_2\\ 0 & 0 & -k_2 & 0 & k_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -k_2 & 0 & k_2\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\end{array}$$

例題：飽和浸透問題

- ⑤連立方程式

$$\left[\mathbf{K}\right]\left\{\mathbf{h}^{w}\right\}=\left\{\mathbf{f}_{q}\right\}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_1+k_2 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1+k_2 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & -k_2 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_2 & 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h_1^{w*} \\ h_2^{w*} \\ h_3^{w} \\ h_4^{w} \\ h_5^{w*} \\ h_6^{w*} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} q_1^{w} \\ q_2^{w} \\ q_3^{w*} \\ q_4^{w*} \\ q_5^{w} \\ q_6^{w} \end{Bmatrix}$$

$$\left(k_1+k_2\right)h_3^{w}=k_1h_1^{w*}+k_2h_5^{w*}$$

$$\left(k_1+k_2\right)h_4^{w}=k_1h_2^{w*}+k_2h_6^{w*}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -k_1 & 0 & k_1+k_2 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1+k_2 & 0 & -k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h_1^{w*} \\ h_2^{w*} \\ h_3^{w} \\ h_4^{w} \\ h_5^{w*} \\ h_6^{w*} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

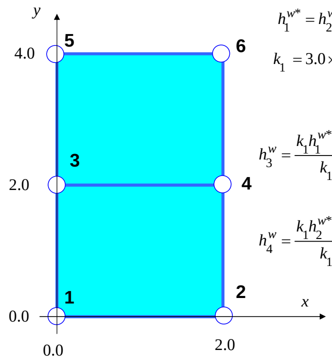
$$h_3^{w}=\frac{k_1h_1^{w*}+k_2h_5^{w*}}{k_1+k_2}$$

$$h_4^{w}=\frac{k_1h_2^{w*}+k_2h_6^{w*}}{k_1+k_2}$$

例題：飽和浸透問題

- ⑤連立方程式の解

$$\left[\mathbf{K}\right]\left\{\mathbf{h}^{w}\right\}=\left\{\mathbf{f}_{q}\right\}$$



$$h_1^{w*}=h_2^{w*}=6.0m \qquad h_5^{w*}=h_6^{w*}=4.0m$$

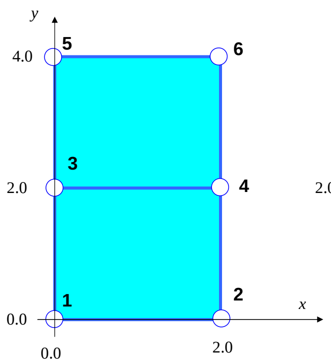
$$k_1=3.0\times10^{-6}m/\min \qquad k_2=1.0\times10^{-6}m/\min$$

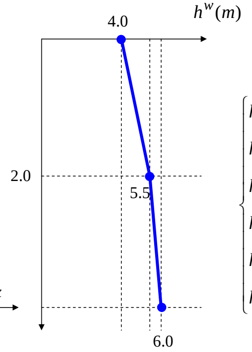
$$h_3^{w}=\frac{k_1h_1^{w*}+k_2h_5^{w*}}{k_1+k_2}=\frac{\left(3.0\times10^{-6}\right)\times6.0+\left(1.0\times10^{-6}\right)\times4.0}{3.0\times10^{-6}+1.0\times10^{-6}}=5.5m$$

$$h_4^{w}=\frac{k_1h_2^{w*}+k_2h_6^{w*}}{k_1+k_2}=\frac{\left(3.0\times10^{-6}\right)\times6.0+\left(1.0\times10^{-6}\right)\times4.0}{3.0\times10^{-6}+1.0\times10^{-6}}=5.5m$$

例題：飽和浸透問題

- ⑤連立方程式の解（節点の水頭）



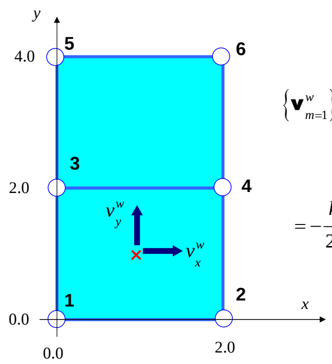


$$\begin{Bmatrix} h_1^{w} \\ h_2^{w} \\ h_3^{w} \\ h_4^{w} \\ h_5^{w} \\ h_6^{w} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 6.0 \\ 6.0 \\ 5.5 \\ 5.5 \\ 4.0 \\ 4.0 \end{Bmatrix} \quad \text{(m)}$$

例題：飽和浸透問題

- ⑥要素内流速

$$\mathbf{v}^{w}=-k\frac{\partial h^{w}}{\partial \mathbf{x}}=-k\left[\mathbf{B}^{w}\right]\left\{\mathbf{h}^{w}\right\}$$



$$\left[\mathbf{B}^{w}\right]=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}=\frac{1}{2L}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{\mathbf{v}_{m=1}^{w}\right\}=\begin{Bmatrix} v_x^{w} \\ v_y^{w} \end{Bmatrix}=-k\times\frac{1}{2L}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h_1^{w} \\ h_2^{w} \\ h_4^{w} \\ h_3^{w} \end{Bmatrix}$$

$$=-\frac{k_1}{2L}\begin{Bmatrix} -h_1^{w}+h_2^{w}-h_4^{w}+h_3^{w} \\ -h_1^{w}-h_2^{w}+h_4^{w}+h_3^{w} \end{Bmatrix}=-\frac{k_1}{2L}\begin{Bmatrix} 0 \\ -2h_1^{w}+2h_3^{w} \end{Bmatrix}$$

$$=-\frac{3.0\times10^{-6}}{2\times2}\begin{Bmatrix} 0 \\ -2\times6+2\times5.5 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 7.5\times10^{-7} \end{Bmatrix}$$

$$\left(m/\min\right)$$

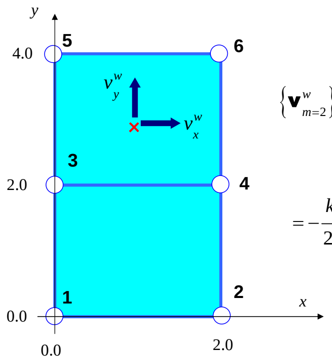
Advanced Geotechnical Numerical Analysis

例題：飽和浸透問題

■ ⑥要素内流速

$$\boxed{\mathbf{v}^w = -k\frac{\partial h^w}{\partial \mathbf{x}} = -k\left[\mathbf{B}^w\right]\left\{\mathbf{h}^w\right\}}$$

$$\left[\mathbf{B}^w\right] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2L}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\left\{\mathbf{v}^w_{m=2}\right\} = \begin{Bmatrix} v_x^w \\ v_y^w \end{Bmatrix} = -k \times \frac{1}{2L}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h_3^w \\ h_4^w \\ h_6^w \\ h_5^w \end{Bmatrix}$$

$$= -\frac{k_2}{2L}\begin{Bmatrix} -h_3^w + h_4^w - h_6^w + h_5^w \\ -h_3^w - h_4^w + h_6^w + h_5^w \end{Bmatrix} = -\frac{k_2}{2L}\begin{Bmatrix} 0 \\ -2h_3^w + 2h_5^w \end{Bmatrix}$$

$$= -\frac{1.0\times10^{-6}}{2\times2}\begin{Bmatrix} 0 \\ -2\times5.5+2\times4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7.5\times10^{-7} \end{Bmatrix}$$

(m/min)

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

6.まとめ

飽和地盤の浸透問題を有限要素法を用いて解くということは・・・・

連立方程式 $\left[\mathbf{K}\right]\left\{\mathbf{h}^w\right\} = \left\{\mathbf{f}_q\right\}$ を、境界条件 $\left\{\mathbf{h}^w\right\} = \left\{\mathbf{h}^{w*}\right\}$ の下で解け。

ここに、

$$\left[\mathbf{K}\right] = \sum_{m=1}^{M}\left[\mathbf{K}_m^e\right] \qquad \left\{\mathbf{f}_q\right\} = \sum_{m=1}^{M}\left\{\mathbf{f}_q^e\right\}$$

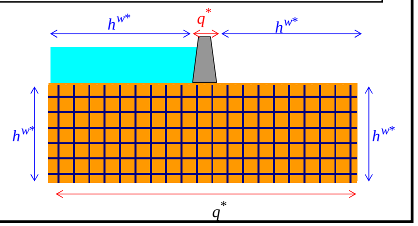
$$\left[\mathbf{K}_m^e\right] = \int_{V_m^e} k\left[\mathbf{B}_m^w\right]^T\left[\mathbf{B}_m^w\right]dV \qquad \left\{\mathbf{f}_q^e\right\} = \sum_{k=1}^{4}\int_{Sq_m^{e\,k}}\left[\hat{\mathbf{N}}^k\right]^T\left[\hat{\mathbf{N}}^k\right]\left\{\mathbf{q}_m^{*k}\right\}dS$$

$\left[\mathbf{K}\right]$ **全体透水マトリックス**

$\left\{\mathbf{f}_q\right\}$ **全体流量フラックスベクトル**

$\left[\mathbf{K}_m^e\right]$ **要素透水マトリックス**

$\left\{\mathbf{f}_q^e\right\}$ **要素流量フラックスベクトル**



Advanced Geotechnical Numerical Analysis

6.まとめ

飽和地盤の浸透問題を有限要素法を用いて解く手順

1.初期条件(材料定数や層の分布)・境界条件を考えて有限要素分割する。
2.要素ごとに、要素透水行列、境界の流量フラックスベクトルを作成
3.全体方程式を作成。
4.境界条件を考慮して連立方程式を解く。
5.節点水頭が求まる。
6.要素ごとに流速を求める。