地盤数値解析学特論
Advanced
Geotechnical
Numerical Analysis

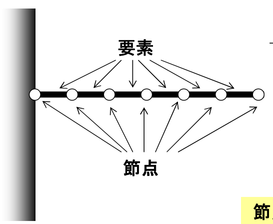
防災環境地盤工学研究室
村上　哲
Murakami, Satoshi

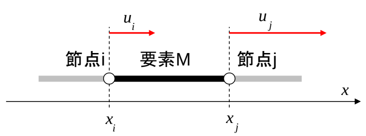
4.　有限要素法

- 単軸圧縮を受ける棒の問題
  - 有限要素法の流れ（おさらい）
- 有限要素
  - 一次元問題
  - 二次元問題
  - 三次元問題
- アイソパラメタリック要素と数値積分
- 境界条件とその与え方
  - Dirichlet境界
  - Neumann境界

一次元問題の有限要素

- 線要素



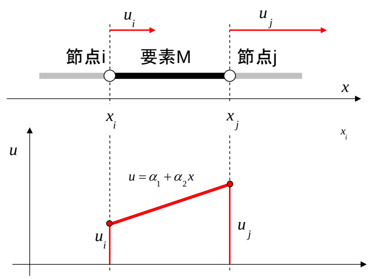


要素Mの任意の位置における変位
（節点iと節点jの間の変位）

節点iと節点jの変位ベクトルを用いて表現（補間）

一次元問題の有限要素

- 線要素



要素Mの任意の位置における
変位を現す補間式として、次式を採用する

$$u=\alpha_1+\alpha_2 x$$

$x=x_i$ において $u=u_i$ 、$x=x_j$ において $u=u_j$
となることから、

$$u_i=\alpha_1+\alpha_2 x_i \quad ①$$
$$u_j=\alpha_1+\alpha_2 x_j \quad ②$$

①-②より、

$$u_i-u_j=\alpha_2\left(x_i-x_j\right)$$

$$\alpha_2=\frac{u_i-u_j}{x_i-x_j}$$

①×x_j-②×x_iより、

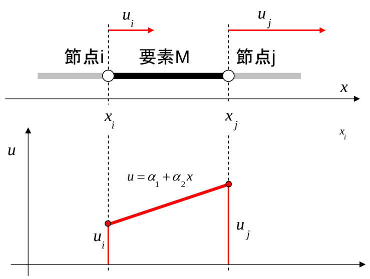
$$u_i x_j-u_j x_i=-\alpha_1\left(x_i-x_j\right)$$

$$\alpha_1=-\frac{u_i x_j-u_j x_i}{x_i-x_j}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

一次元問題の有限要素

■ 線要素



代入して整理すると、

$$u=-\frac{u_i x_j-u_j x_i}{x_i-x_j}+\frac{u_i-u_j}{x_i-x_j}x$$

$$=\frac{x-x_j}{x_i-x_j}u_i+\frac{x_i-x}{x_i-x_j}u_j$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{x-x_j}{x_i-x_j} & \frac{x_i-x}{x_i-x_j}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}$$

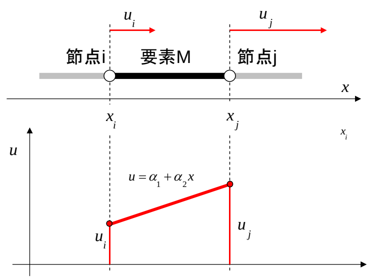
$$=\begin{bmatrix}N_1 & N_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{u}^e$$

有限要素法の世界では、
このNを補間関数、形状関数と呼んでいる。
変位とした場合は、変位関数とも呼ばれる。
Nが位置の関数のみで与えられることに、注意する。
→いかなる変位に対してもこのNは
変わらないということ。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

一次元問題の有限要素

■ 線要素のひずみ



一次元問題のひずみ＝伸びひずみ

$$\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\begin{bmatrix}N_1 & N_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{x_i-x_j} & \frac{-1}{x_i-x_j}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{u_i-u_j}{x_i-x_j}=\frac{\delta_m}{L_m}$$

要素M内のひずみは一様である。

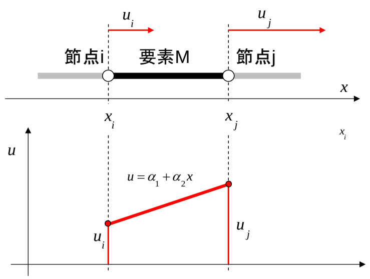
$$\varepsilon=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}^e \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x}\end{bmatrix}$$

変位～ひずみマトリックス
B-Matrix

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

一次元問題の有限要素

■ 線要素（一次線要素のまとめ）



要素内における変位の仮定

$$u=\alpha_1+\alpha_2 x$$

節点の変位量を用いた表現

$$u=\begin{bmatrix}N_1 & N_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{u}^e$$

要素内の任意の位置におけるひずみ

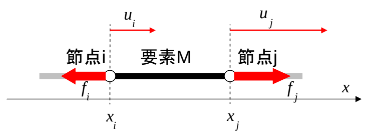
$$\varepsilon=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}^e$$

要素内の変位の分布として、
一次関数を採用しているので、
このような線要素は、
一次線要素と呼ばれる。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

一次元問題の有限要素

■ 線要素（有限要素法への適用）



節点変位と任意関数

$$u=\begin{bmatrix}N_1 & N_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{u}^e$$

$$\eta=\begin{bmatrix}N_1 & N_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\eta_i\\\eta_j\end{Bmatrix}=\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\eta}^e$$

変位と任意関数の１階微分

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}^e$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\eta_i\\\eta_j\end{Bmatrix}=\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\eta}^e$$

微分方程式 $\frac{d\sigma}{dx}=0$

境界条件 $u|_{x=x_i}=u_i \quad u|_{x=x_j}=u_j$

$f_i=A\sigma|_{x=x_i} \quad f_j=A\sigma|_{x=x_j}$

諸関係式 $\frac{du}{dx}=\varepsilon \quad \sigma=E\varepsilon$

積分方程式 $f_j\eta_j-f_i\eta_i=\int_{x_i}^{x_j}\sigma\frac{d\eta}{dx}Adx$

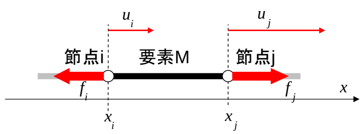
境界条件 $u|_{x=x_i}=u_i \quad u|_{x=x_j}=u_j$

諸関係式 $\frac{du}{dx}=\varepsilon \quad \sigma=E\varepsilon$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

一次元問題の有限要素

■ 線要素（有限要素法への適用）



変位と任意関数の１階微分

$$\frac{\partial u}{\partial x}=[\mathbf{B}]\{\mathbf{u}^e\} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x}=[\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\eta}^e\}$$

$$[\mathbf{K}^e]=\left[\int_{x_i}^{x_j}[\mathbf{B}]^T E[\mathbf{B}]Adx\right]$$
$$=\left[[\mathbf{B}]^T E[\mathbf{B}]A\int_{x_i}^{x_j}dx\right]=\left[AL[\mathbf{B}]^T E[\mathbf{B}]\right]$$

$$f_j\eta_j - f_i\eta_i=\int_{x_i}^{x_j}\sigma\frac{d\eta}{dx}Adx$$
$$f_j\eta_j - f_i\eta_i=\{\eta_i \quad \eta_j\}\begin{Bmatrix}-f_i\\ f_j\end{Bmatrix}=\{\boldsymbol{\eta}^e\}^T\{\mathbf{f}^e\}$$

※メモ
$[\mathbf{A}][\mathbf{B}]=[\mathbf{B}]^T[\mathbf{A}]^T$

$$\int_{x_i}^{x_j}\sigma\frac{d\eta}{dx}Adx=\int_{x_i}^{x_j}E\varepsilon\frac{d\eta}{dx}Adx$$
$$=\int_{x_i}^{x_j}\frac{d\eta}{dx}E\frac{d\varepsilon}{dx}Adx$$
$$=\int_{x_i}^{x_j}\{\boldsymbol{\eta}^e\}^T[\mathbf{B}]^T E[\mathbf{B}]\{\mathbf{u}^e\}Adx$$
$$=\{\boldsymbol{\eta}^e\}^T\left[\int_{x_i}^{x_j}[\mathbf{B}]^T E[\mathbf{B}]Adx\right]\{\mathbf{u}^e\}$$

$[\mathbf{K}^e]=\left[\int_{x_i}^{x_j}[\mathbf{B}]^T E[\mathbf{B}]Adx\right]$ とおくと、

$$\int_{x_i}^{x_j}\sigma\frac{d\eta}{dx}Adx=\{\boldsymbol{\eta}^e\}^T[\mathbf{K}^e]\{\mathbf{u}^e\}$$

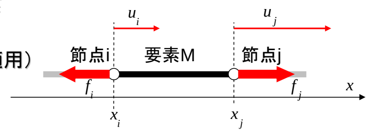
$$\{\boldsymbol{\eta}^e\}^T[\mathbf{K}^e]\{\mathbf{u}^e\}=\{\boldsymbol{\eta}^e\}^T\{\mathbf{f}^e\}$$

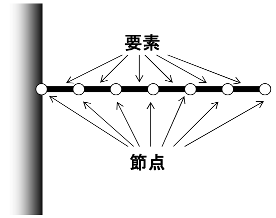
$[\mathbf{K}^e]\{\mathbf{u}^e\}=\{\mathbf{f}^e\}$ 要素剛性方程式

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

一次元問題の有限要素

■ 線要素（有限要素法への適用）





$[\mathbf{K}^e]\{\mathbf{u}^e\}=\{\mathbf{f}^e\}$ 要素剛性方程式

全ての要素に対して、
要素剛性方程式を作成

節点の番号に基づいて重ね合わせ

$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\}=\{\mathbf{f}\}$ 全体剛性方程式

$$[\mathbf{K}]=\sum_{m=1}^{M}[\mathbf{K}^e]$$
$$\{\mathbf{u}\}=\{u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_N\}^T$$
$$\{\mathbf{f}\}=\{f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_N\}^T$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

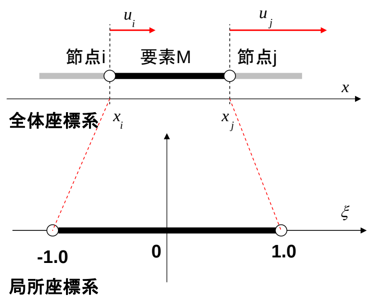
■ 境界値問題の弱形式と有限要素法
- 要約すると。。。
- 微分方程式の境界値問題を弱形式（積分方程式）へ
- 未知数となる（この場合は変位であった）の近似
- 任意関数も同じ関数で近似
- 積分を解き、要素方程式を作る
- 連立方程式に帰着
- 境界条件を考慮して解く

有限要素法
（ガラーキン法による）

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

一次元問題の有限要素

■ アイソパラメタリック線要素



要素Mの任意の位置xを
局所座標系で表すことを考える。

$$x(\xi)$$

$$x(\xi)=N_1(\xi)x_1+N_2(\xi)x_2=\sum_{i=1}^{2}N_i(\xi)x_i$$

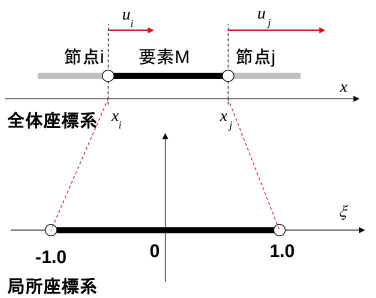
$$N_1=\frac{1}{2}(1-\xi) \qquad N_2=\frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$\xi=-1\longrightarrow N_1=1, N_2=0$$
$$x(\xi=-1)=x_1$$
$$\xi=+1\longrightarrow N_1=0, N_2=1$$
$$x(\xi=+1)=x_2$$
$$\xi=0\longrightarrow N_1=\frac{1}{2}, N_2=\frac{1}{2}$$
$$x(\xi=0)=\frac{x_1+x_2}{2}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

一次元問題の有限要素

■ アイソパラメタリック線要素



要素Mの任意の位置xにおける変位も
同様のNを用いて表す。

$$x(\xi)=N_1(\xi)x_1+N_2(\xi)x_2=\sum_{i=1}^{2}N_i(\xi)x_i$$

$$u(\xi)=N_1(\xi)u_1+N_2(\xi)u_2=\sum_{i=1}^{2}N_i(\xi)u_i$$

$$N_1=\frac{1}{2}(1-\xi)\qquad N_2=\frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}=\left(\frac{\partial N_1}{\partial \xi}u_1+\frac{\partial N_2}{\partial \xi}u_2\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{\partial N_1}{\partial \xi}x_1+\frac{\partial N_2}{\partial \xi}x_2=\frac{-x_1+x_2}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(-\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2\right)\frac{2}{-x_1+x_2}=\frac{u_2-u_1}{x_2-x_1}=\frac{\delta_m}{L_m}$$

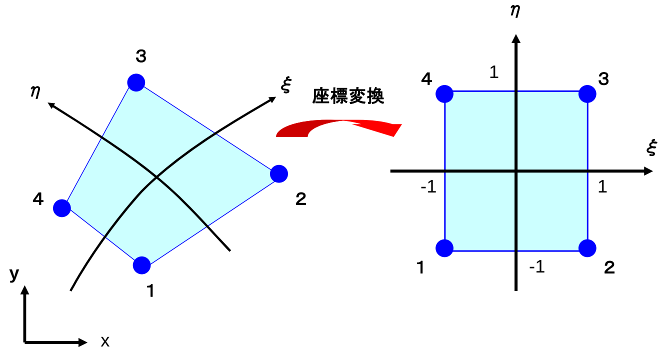
※先に示した線要素と同じ

未知のパラメータを指定する物理量の
補間関数を座標の補間関数と同一に選ぶ
有限要素を
アイソパラメトリック要素(isoparametric element)と呼ぶ。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

二次元問題の有限要素

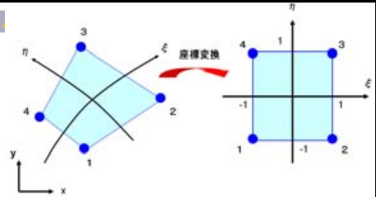
■ アイソパラメタリック四角形要素（4節点）



Advanced Geotechnical Numerical

二次元問題の有限要素

■ アイソパラメタリック
四角形要素（4節点）



要素Mの任意の位置(x,y)を
次の補間係数で表す。

$$x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)x_i\qquad y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)y_i$$

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

未知の変数である物理量の
補間関数も同一に選ぶ

例）

水頭 $h^w(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)h_i^w$

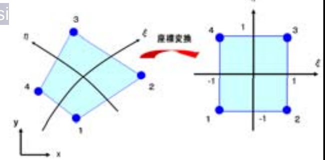
変位速度 $v^x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)v_i^x$

$$v^y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)v_i^y$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysi

二次元問題の有限要素

■ アイソパラメタリック四角形要素（4節点）



要素Mの任意の位置(x,y)を
次の補間係数で表す。

$$x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)x_i$$
$$y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)y_i$$

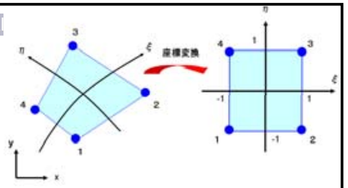
$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\qquad \frac{\partial N_1}{\partial \xi}=-\frac{1}{4}(1-\eta)\qquad \frac{\partial N_1}{\partial \eta}=-\frac{1}{4}(1-\xi)$$
$$N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\qquad \frac{\partial N_2}{\partial \xi}=\frac{1}{4}(1-\eta)\qquad \frac{\partial N_2}{\partial \eta}=-\frac{1}{4}(1+\xi)$$
$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\qquad \frac{\partial N_3}{\partial \xi}=\frac{1}{4}(1+\eta)\qquad \frac{\partial N_3}{\partial \eta}=\frac{1}{4}(1+\xi)$$
$$N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\qquad \frac{\partial N_4}{\partial \xi}=-\frac{1}{4}(1+\eta)\qquad \frac{\partial N_4}{\partial \eta}=\frac{1}{4}(1-\xi)$$

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}$$

Jacobian matrix

$$J=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}x_i & \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}x_i\\ \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}y_i & \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}y_i\end{bmatrix}$$

二次元問題の有限要素



- アイソパラメタリック四角形要素（4節点）

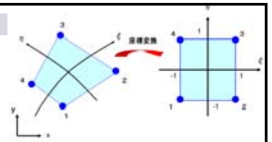
$$x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)x_i \qquad y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)y_i$$

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial x}{\partial\eta}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}$$

Jacobian matrix $\longleftrightarrow$ **逆関係**

$$\mathbf{J}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial\xi}{\partial y} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{bmatrix}=\mathbf{J}^{*}=\begin{bmatrix}J^*_{11} & J^*_{12}\\ J^*_{21} & J^*_{22}\end{bmatrix}$$

二次元問題の有限要素



- アイソパラメタリック四角形要素（4節点）

水頭 $h^w(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)h_i^w$

動水勾配の成分

$$-i_x=\frac{\partial h^w}{\partial x}=\frac{\partial h^w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial h^w}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\sum_{i=1}^{4}\left(J^*_{11}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}h_i^w+J^*_{12}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}h_i^w\right)=\sum_{i=1}^{4}\left(J^*_{11}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}+J^*_{12}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}\right)h_i^w=\sum_{i=1}^{4}b_iv_i^x$$

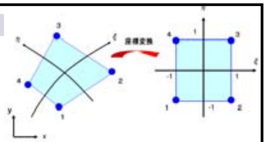
$$-i_y=\frac{\partial h^w}{\partial y}=\frac{\partial h^w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial h^w}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\sum_{i=1}^{4}\left(J^*_{21}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}h_i^w+J^*_{22}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}h_i^w\right)=\sum_{i=1}^{4}\left(J^*_{21}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}+J^*_{22}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}\right)h_i^w=\sum_{i=1}^{4}c_ih_i^w$$

ここに、 $b_i=J^*_{11}\dfrac{\partial N_i}{\partial\xi}+J^*_{12}\dfrac{\partial N_i}{\partial\eta}$ $\quad c_i=J^*_{21}\dfrac{\partial N_i}{\partial\xi}+J^*_{22}\dfrac{\partial N_i}{\partial\eta}$

$$\{-\mathbf{i}\}=\begin{Bmatrix}-i_x\\ -i_y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sum_{i=1}^{4}b_ih_i^w\\ \sum_{i=1}^{4}c_ih_i^w\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}h_1^w\\ h_2^w\\ h_3^w\\ h_4^w\end{Bmatrix}=\left[\mathbf{B}^w\right]\left\{\mathbf{h}^{w^e}\right\}$$

$\left[\mathbf{B}^w\right]$ **節点水頭～動水勾配関係マトリクス**

二次元問題の有限要素



- アイソパラメタリック四角形要素（4節点）

変位速度 $v^x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)v_i^x \qquad v^y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)v_i^y$

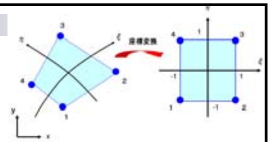
ひずみ速度の成分

$$\dot\varepsilon_x=\frac{\partial v^x}{\partial x}=\frac{\partial v^x}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial v^x}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\sum_{i=1}^{4}\left(J^*_{11}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}v_i^x+J^*_{12}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}v_i^x\right)=\sum_{i=1}^{4}\left(J^*_{11}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}+J^*_{12}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}\right)v_i^x=\sum_{i=1}^{4}b_iv_i^x$$

$$\dot\varepsilon_y=\frac{\partial v^y}{\partial y}=\frac{\partial v^y}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial v^y}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\sum_{i=1}^{4}\left(J^*_{21}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}v_i^y+J^*_{22}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}v_i^y\right)=\sum_{i=1}^{4}\left(J^*_{21}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}+J^*_{22}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}\right)v_i^y=\sum_{i=1}^{4}c_iv_i^y$$

$$\begin{aligned}\dot\gamma_{xy}&=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial v^x}{\partial y}+\frac{\partial v^y}{\partial x}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial v^x}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial v^x}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v^y}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial v^y}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\right\}\\ &=\sum_{i=1}^{4}\left(J^*_{21}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}v_i^x+J^*_{22}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}v_i^x\right)+\sum_{i=1}^{4}\left(J^*_{11}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}v_i^y+J^*_{12}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}v_i^y\right)\\ &=\sum_{i=1}^{4}\left(J^*_{21}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}+J^*_{22}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}\right)v_i^x+\sum_{i=1}^{4}\left(J^*_{11}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}+J^*_{12}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}\right)v_i^y=\sum_{i=1}^{4}c_iv_i^x+\sum_{i=1}^{4}b_iv_i^y\end{aligned}$$

二次元問題の有限要素



- アイソパラメタリック四角形要素（4節点）

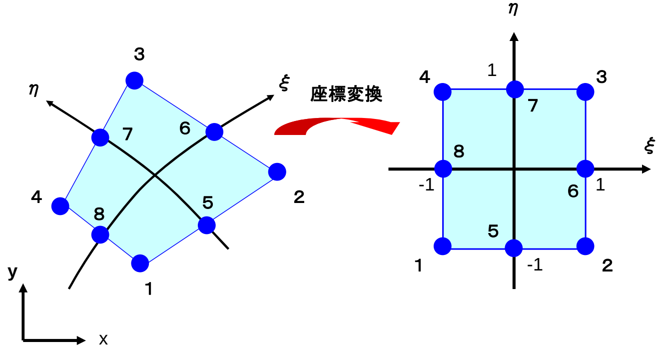
変位速度 $v^x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)v_i^x \qquad v^y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)v_i^y$

$$\{\dot{\boldsymbol\varepsilon}\}=\begin{Bmatrix}\dot\varepsilon_x\\ \dot\varepsilon_y\\ \dot\gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sum_{i=1}^{4}b_iv_i^x\\ \sum_{i=1}^{4}c_iv_i^y\\ \sum_{i=1}^{4}c_iv_i^x+\sum_{i=1}^{4}b_iv_i^y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & b_4 & 0\\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 & c_4\\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 & c_4 & b_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1^x\\ v_1^y\\ v_2^x\\ v_2^y\\ v_3^x\\ v_3^y\\ v_4^x\\ v_4^y\end{Bmatrix}=[\mathbf{B}]\{\mathbf{v}^e\}$$

$[\mathbf{B}]$ **変位速度～ひずみ速度マトリックス**
B-Matrix

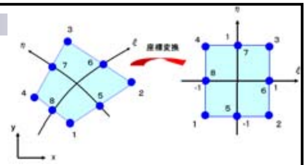
二次元問題の有限要素

- アイソパラメタリック四角形要素（8節点）



二次元問題の有限要素

- アイソパラメタリック
四角形要素（8節点）



要素Mの任意の位置(x,y)を次の補間係数で表す。

$$x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)x_i \qquad y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)y_i$$

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \qquad N_5=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

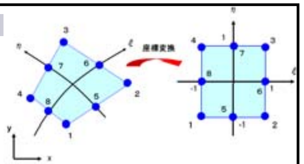
$$N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \qquad N_6=\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \qquad N_5=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \qquad N_5=\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

二次元問題の有限要素

- アイソパラメタリック四角形要素（8節点）



要素Mの任意の位置(x,y)を
次の補間係数で表す。

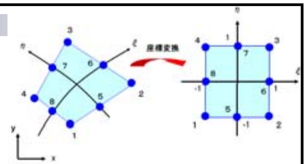
$$x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)x_i \qquad y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)y_i$$

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix} \quad \textbf{Jacobian matrix} \quad J=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}x_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}x_i\\ \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}y_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}y_i\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix} \quad \textbf{Jacobian matrix} \quad \underset{\text{逆関係}}{\longleftrightarrow} \quad \mathbf{J}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x}\\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{bmatrix}=\mathbf{J}^*=\begin{bmatrix}J_{11}^* & J_{12}^*\\ J_{21}^* & J_{22}^*\end{bmatrix}$$

二次元問題の有限要素

- アイソパラメタリック四角形要素（8節点）



水頭 $h^w(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)h_i^w$

動水勾配の成分

$$-i_x=\frac{\partial h^w}{\partial x}=\frac{\partial h^w}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial h^w}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\sum_{i=1}^{8}\left(J_{11}^*\frac{\partial N_i}{\partial \xi}h_i^w+J_{12}^*\frac{\partial N_i}{\partial \eta}h_i^w\right)=\sum_{i=1}^{8}\left(J_{11}^*\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+J_{12}^*\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right)h_i^w=\sum_{i=1}^{8}b_ih_i^w$$

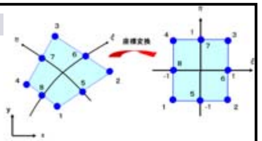
$$-i_y=\frac{\partial h^w}{\partial y}=\frac{\partial h^w}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial h^w}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\sum_{i=1}^{8}\left(J_{21}^*\frac{\partial N_i}{\partial \xi}h_i^w+J_{22}^*\frac{\partial N_i}{\partial \eta}h_i^w\right)=\sum_{i=1}^{8}\left(J_{21}^*\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+J_{22}^*\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right)h_i^w=\sum_{i=1}^{8}c_ih_i^w$$

ここに、 $b_i=J_{11}^*\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+J_{12}^*\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \qquad c_i=J_{21}^*\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+J_{22}^*\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$

$$\{-\mathbf{i}\}=\begin{Bmatrix}-i_x\\ -i_y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sum_{i=1}^{8}b_ih_i^w\\ \sum_{i=1}^{8}c_ih_i^w\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_8\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}h_1^w\\ h_2^w\\ \vdots\\ h_8^w\end{Bmatrix}=\left[\mathbf{B}^w\right]\left\{\mathbf{h}^{we}\right\}$$

$\left[\mathbf{B}^w\right]$ **節点水頭～動水勾配関係マトリクス**

二次元問題の有限要素



■ アイソパラメタリック四角形要素（8節点）

変位速度 $v^x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)v_i^x \quad v^y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)v_i^y$

ひずみ速度の成分

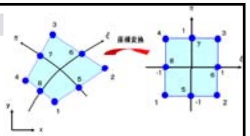
$$\dot{\varepsilon}_x=\frac{\partial v^x}{\partial x}=\frac{\partial v^x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial v^x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\sum_{i=1}^{8}\left(J_{11}^*\frac{\partial N_i}{\partial \xi}v_i^x+J_{12}^*\frac{\partial N_i}{\partial \eta}v_i^x\right)=\sum_{i=1}^{8}\left(J_{11}^*\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+J_{12}^*\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right)v_i^x=\sum_{i=1}^{8}b_iv_i^x$$

$$\dot{\varepsilon}_y=\frac{\partial v^y}{\partial y}=\frac{\partial v^y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial v^y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\sum_{i=1}^{8}\left(J_{21}^*\frac{\partial N_i}{\partial \xi}v_i^y+J_{22}^*\frac{\partial N_i}{\partial \eta}v_i^y\right)=\sum_{i=1}^{8}\left(J_{21}^*\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+J_{22}^*\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right)v_i^y=\sum_{i=1}^{8}c_iv_i^y$$

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{xy}&=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial v^x}{\partial y}+\frac{\partial v^y}{\partial x}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial v^x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial v^x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v^y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial v^y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right\}\\&=\sum_{i=1}^{8}\left(J_{21}^*\frac{\partial N_i}{\partial \xi}v_i^x+J_{22}^*\frac{\partial N_i}{\partial \eta}v_i^x\right)+\sum_{i=1}^{8}\left(J_{11}^*\frac{\partial N_i}{\partial \xi}v_i^y+J_{12}^*\frac{\partial N_i}{\partial \eta}v_i^y\right)\\&=\sum_{i=1}^{8}\left(J_{21}^*\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+J_{22}^*\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right)v_i^x+\sum_{i=1}^{8}\left(J_{11}^*\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+J_{12}^*\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right)v_i^y=\sum_{i=1}^{8}c_iv_i^x+\sum_{i=1}^{8}b_iv_i^y\end{aligned}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

二次元問題の有限要素



■ アイソパラメタリック四角形要素（8節点）

変位速度 $v^x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)v_i^x \quad v^y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)v_i^y$

ひずみ速度の成分

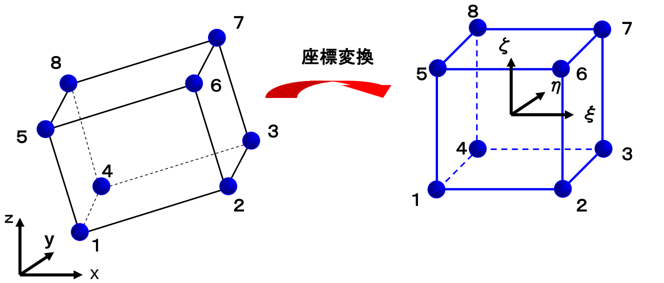
$$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}=\begin{Bmatrix}\dot{\varepsilon}_x\\ \dot{\varepsilon}_y\\ \dot{\gamma}_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sum_{i=1}^{8}b_iv_i^x\\ \sum_{i=1}^{8}c_iv_i^y\\ \sum_{i=1}^{8}c_iv_i^x+\sum_{i=1}^{8}b_iv_i^y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1&0&b_2&0&\cdots&\cdots&b_8&0\\0&c_1&0&c_2&\cdots&\cdots&0&c_8\\c_1&b_1&c_2&b_2&\cdots&\cdots&c_8&b_8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1^x\\v_1^y\\v_2^x\\v_2^y\\ \vdots\\ \vdots\\v_8^x\\v_8^y\end{Bmatrix}=[\mathbf{B}]\{\mathbf{v}^e\}$$

$[\mathbf{B}]$ **変位速度～ひずみ速度マトリックス**
B-Matrix

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

三次元問題の有限要素

■ アイソパラメタリック六面体要素（8節点）



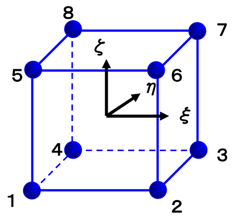
Advanced Geotechnical Numerical Analysis

三次元問題の有限要素

■ アイソパラメタリック六面体要素（8節点）

要素Mの任意の位置(x,y,z)を次の補間係数で表す。

$$x(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta,\zeta)x_i \quad y(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta,\zeta)y_i \quad z(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta,\zeta)z_i$$



$$N_1=\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad N_5=\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$
$$N_2=\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad N_6=\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$
$$N_3=\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad N_7=\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$
$$N_4=\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad N_8=\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

三次元問題の有限要素

- アイソパラメタリック六面体要素（8節点）

要素Mの任意の位置(x,y)を次の補間係数で表す。

$$x(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta,\zeta)x_i \quad y(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta,\zeta)y_i \quad z(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta,\zeta)z_i$$

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial x}{\partial\zeta}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\zeta}\\ \frac{\partial z}{\partial\xi} & \frac{\partial z}{\partial\eta} & \frac{\partial z}{\partial\zeta}\end{bmatrix} \quad \textbf{Jacobian matrix} \quad \mathbf{J}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}x_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}x_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}x_i\\ \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}y_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}y_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}y_i\\ \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}z_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}z_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}z_i\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial x}{\partial\zeta}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\zeta}\\ \frac{\partial z}{\partial\xi} & \frac{\partial z}{\partial\eta} & \frac{\partial z}{\partial\zeta}\end{bmatrix} \quad \textbf{Jacobian matrix} \quad \overset{\longleftrightarrow}{\text{逆関係}} \quad \mathbf{J}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\zeta}{\partial x}\\ \frac{\partial\xi}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial y} & \frac{\partial\zeta}{\partial y}\\ \frac{\partial\xi}{\partial z} & \frac{\partial\eta}{\partial z} & \frac{\partial\zeta}{\partial z}\end{bmatrix}=\mathbf{J}^*=\begin{bmatrix}J^*_{11} & J^*_{12} & J^*_{13}\\ J^*_{21} & J^*_{22} & J^*_{23}\\ J^*_{31} & J^*_{32} & J^*_{33}\end{bmatrix}$$

三次元問題の有限要素

- アイソパラメタリック六面体要素（8節点）

水頭 $h^w(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta,\zeta)h_i^w$

動水勾配の成分

$$-i_x=\frac{\partial h^w}{\partial x}=\frac{\partial h^w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial h^w}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial h^w}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\sum_{i=1}^{8}\left(J^*_{11}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}h_i^w+J^*_{12}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}h_i^w+J^*_{13}\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}h_i^w\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{8}\left(J^*_{11}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}+J^*_{12}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}+J^*_{13}\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}\right)h_i^w=\sum_{i=1}^{8}b_ih_i^w$$

$$-i_y=\frac{\partial h^w}{\partial y}=\frac{\partial h^w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial h^w}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial h^w}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\sum_{i=1}^{8}\left(J^*_{21}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}h_i^w+J^*_{22}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}h_i^w+J^*_{23}\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}h_i^w\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{8}\left(J^*_{21}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}+J^*_{22}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}+J^*_{23}\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}\right)h_i^w=\sum_{i=1}^{8}c_ih_i^w$$

$$-i_z=\frac{\partial h^w}{\partial z}=\frac{\partial h^w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial h^w}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial h^w}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}=\sum_{i=1}^{8}\left(J^*_{31}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}h_i^w+J^*_{32}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}h_i^w+J^*_{33}\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}h_i^w\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{8}\left(J^*_{31}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}+J^*_{32}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}+J^*_{33}\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}\right)h_i^w=\sum_{i=1}^{8}d_ih_i^w$$

ここに、$b_i=J^*_{11}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}+J^*_{12}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}+J^*_{13}\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}$ $\quad c_i=J^*_{21}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}+J^*_{22}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}+J^*_{23}\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}$

$d_i=J^*_{31}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}+J^*_{32}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}+J^*_{33}\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}$

三次元問題の有限要素

- アイソパラメタリック六面体要素（8節点）

水頭 $h^w(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta,\zeta)h_i^w$

動水勾配の成分

$$\{-\mathbf{i}\}=\begin{Bmatrix}-i_x\\-i_y\\-i_z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sum_{i=1}^{8}b_ih_i^w\\ \sum_{i=1}^{8}c_ih_i^w\\ \sum_{i=1}^{8}d_ih_i^w\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_8\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_8\\ d_1 & d_2 & \cdots & d_8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}h_1^w\\h_2^w\\ \vdots\\h_8^w\end{Bmatrix}=\left[\mathbf{B}^w\right]\left\{\mathbf{h}^{we}\right\}$$

$\left[\mathbf{B}^w\right]$ **節点水頭～動水勾配関係マトリクス**

三次元問題の有限要素

- アイソパラメタリック六面体要素（8節点）

変位速度 $v^x(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta,\zeta)v_i^x \quad v^y(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta,\zeta)v_i^y \quad v^y(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta,\zeta)v_i^y$

ひずみ速度の成分（結果のみ）

$$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}=\begin{Bmatrix}\dot{\varepsilon}_x\\ \dot{\varepsilon}_y\\ \dot{\varepsilon}_z\\ \dot{\gamma}_{xy}\\ \dot{\gamma}_{yz}\\ \dot{\gamma}_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sum_{i=1}^{8}b_iv_i^x\\ \sum_{i=1}^{8}c_iv_i^y\\ \sum_{i=1}^{8}d_iv_i^z\\ \sum_{i=1}^{8}c_iv_i^x+\sum_{i=1}^{8}b_iv_i^y\\ \sum_{i=1}^{8}d_iv_i^y+\sum_{i=1}^{8}c_iv_i^z\\ \sum_{i=1}^{8}b_iv_i^z+\sum_{i=1}^{8}d_iv_i^x\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & \cdots & b_8 & 0 & 0\\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & c_8 & 0\\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_1 & \cdots & 0 & 0 & d_8\\ c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & \cdots & c_8 & b_8 & 0\\ 0 & d_1 & c_1 & 0 & d_1 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & c_8\\ d_1 & 0 & b_1 & d_1 & 0 & b_2 & \cdots & d_1 & 0 & b_8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1^x\\v_1^y\\v_1^z\\v_2^x\\v_2^y\\v_2^z\\ \vdots\\v_8^x\\v_8^y\\v_8^z\end{Bmatrix}=[\mathbf{B}]\{\mathbf{v}^e\}$$

$[\mathbf{B}]$ **変位速度～ひずみ速度マトリックス**
B-Matrix

地盤の2次元問題で使われる有限要素の種類

- 線要素
  - トラス要素
    - 例えば、ジオシンセティックス（曲げ剛性の無い材料）
  - ビーム（はり）要素
    - 例えば、矢板（曲げ剛性の有る材料）
  - シェル要素
    - 例えば、トンネルのコンクリート部分
- 面要素←土の部分に適用する
  - 三角形要素
  - アイソパラメタリック四角形要素
    - 4節点
    - 8節点
    - N節点
- 特殊な要素
  - ジョイント要素
    - 不連続面の相互作用として利用

全体座標系の値を用いて、局所座標系で表現

$$x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{N}N_i(\xi,\eta)x_i \qquad y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{N}N_i(\xi,\eta)y_i$$

座標系の補間関数と同様に、
対象とする物理量の補間も同じとする。

水頭 $h^w(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{N}N_i(\xi,\eta)h_i^w$

変位速度 $v^x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{N}N_i(\xi,\eta)v_i^x \qquad v^y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{N}N_i(\xi,\eta)v_i^y$

動水勾配 $\{-\mathbf{i}\}=[\mathbf{B}^w]\{\mathbf{h}^{we}\}$

$[\mathbf{B}^w]$ 節点水頭～動水勾配関係マトリクス

ひずみ速度 $\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}=[\mathbf{B}]\{\mathbf{v}^e\}$

$[\mathbf{B}]$ 変位速度～ひずみ速度マトリックス

メリット：ガウスの数値積分を利用できる

アイソパラメタリック要素を用いた場合の積分

微小体積要素とJacobian（ヤコビアン）で出てきた次の関係

$$dxdydz=\det|\mathbf{J}|\,d\xi d\eta d\varsigma$$

を使うと、ある関数f(x,y,z)の積分は、

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(\xi,\eta,\varsigma)\det|\mathbf{J}|\,d\xi d\eta d\varsigma}$$ 3次元問題

同様に、

$$\boxed{\iint f(x,y)\,dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(\xi,\eta)\det|\mathbf{J}|\,d\xi d\eta}$$ 2次元問題

$$\boxed{\int f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(\xi)\det|\mathbf{J}|\,d\xi}$$ 1次元問題

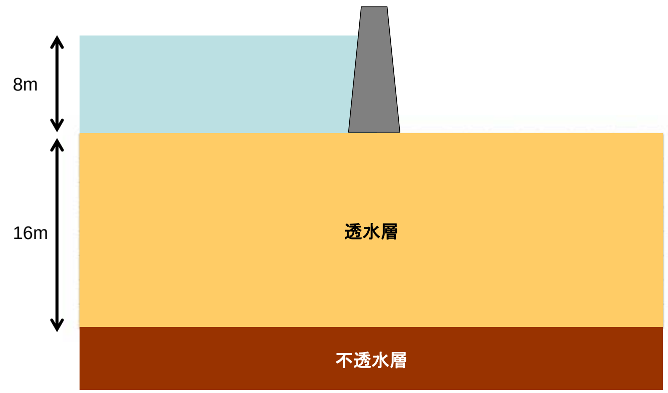
メリット：ガウスの数値積分を利用できる

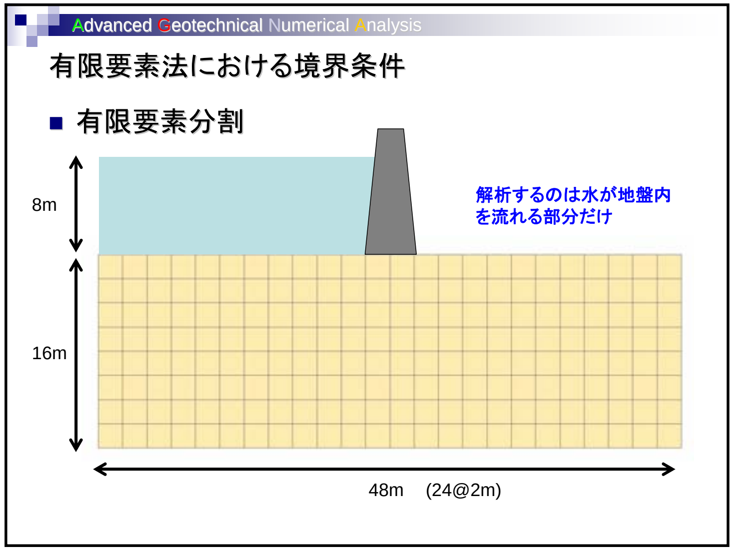
- 境界値問題と有限要素法
  - 微分方程式の境界値問題を弱形式（積分方程式）へ
  - 未知数となる変数の有限要素近似
  - 任意関数も同じ関数で有限要素近似

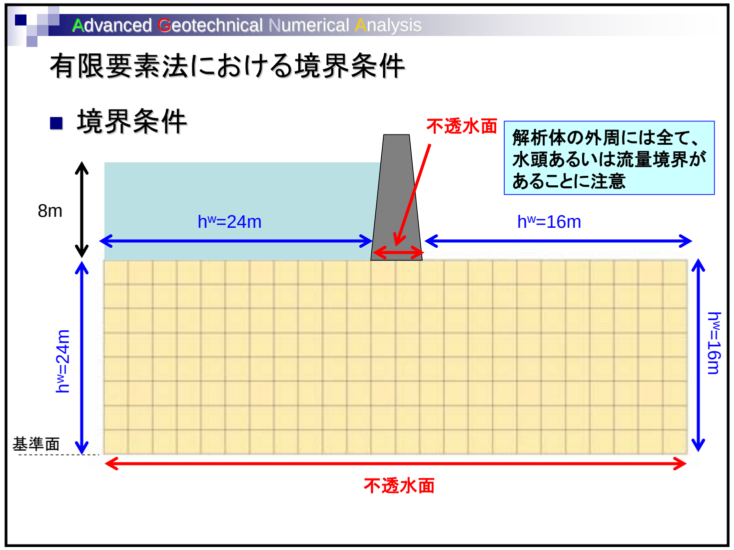
  有限要素法
  （ガラーキン法による）
  - 要素方程式を作る
    - 積分はあったままでもよい。Gaussの数値積分により代数的に演算可能
  - 連立方程式に帰着
  - 境界条件を考慮して解く

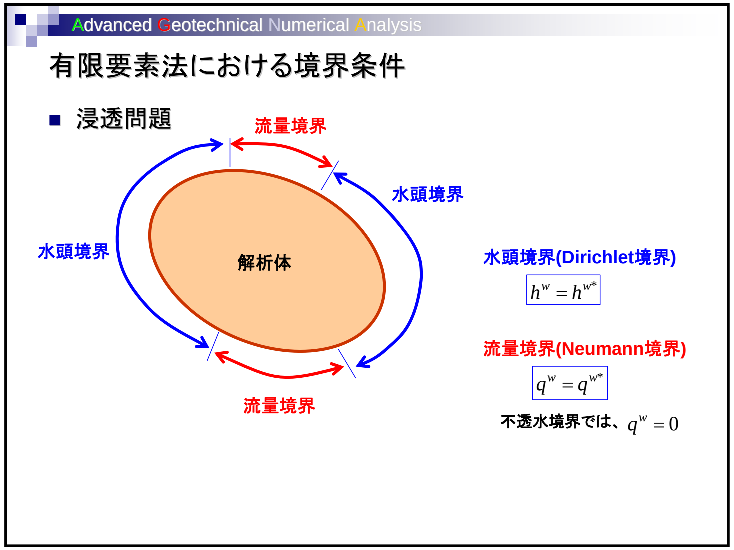
有限要素法における境界条件

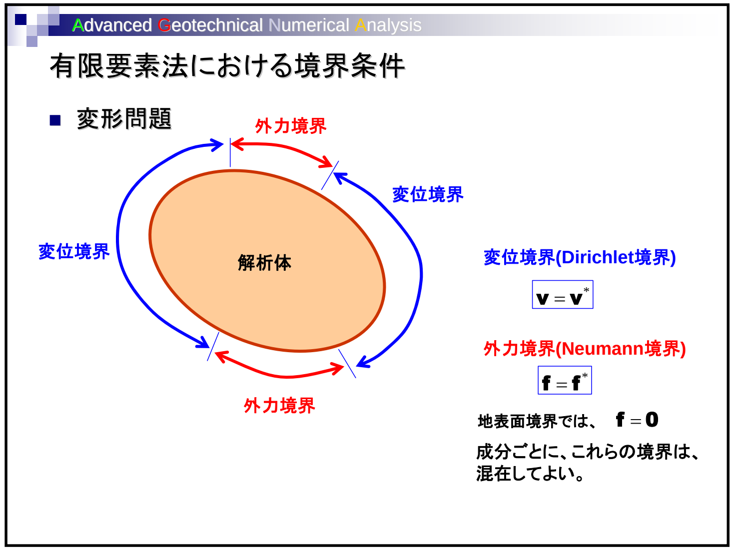
- 浸透問題




Advanced Geotechnical Numerical Analysis
有限要素法における境界条件
■ 有限要素分割
8m
16m
解析するのは水が地盤内
を流れる部分だけ
48m (24@2m)

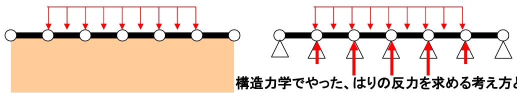

Advanced Geotechnical Numerical Analysis
有限要素法における境界条件
■ 境界条件
不透水面
解析体の外周には全て、
水頭あるいは流量境界が
あることに注意
8m
hw=24m
hw=16m
hw=24m
hw=16m
基準面
不透水面


Advanced Geotechnical Numerical Analysis
有限要素法における境界条件
■ 浸透問題
流量境界
水頭境界
水頭境界
解析体
流量境界
水頭境界(Dirichlet境界)
$h^w = h^{w*}$
流量境界(Neumann境界)
$q^w = q^{w*}$
不透水境界では、$q^w = 0$


Advanced Geotechnical Numerical Analysis
有限要素法における境界条件
■ 変形問題
外力境界
変位境界
変位境界
解析体
外力境界
変位境界(Dirichlet境界)
$\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$
外力境界(Neumann境界)
$\mathbf{f} = \mathbf{f}^*$
地表面境界では、 $\mathbf{f} = \mathbf{0}$
成分ごとに、これらの境界は、
混在してよい。

有限要素法における境界条件

- 境界条件は節点として与える。要素の辺には与えない。
  - Dirichlet境界
    - 水頭境界：節点における水頭の値
    - 変位境界：節点における変位（変位速度）の値
  - Neumann境界
    - 流量境界：節点における流量の値
      - 不透水境界であれば0
      - ポンプなどによる汲み上げは、その値
    - 外力境界：節点における外力（外力増加速度）の値
      - 地表面であればX,Y方向ともに0
      - 分布荷重のような場合は、等価な節点外力（等価節点外力）として与える。



構造力学でやった、はりの反力を求める考え方と同じ

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

4.有限要素法まとめ

- 単軸圧縮を受ける棒の問題
  - 有限要素法の流れ（おさらい）
- 有限要素
  - 一次元問題
    - 線要素
  - 二次元問題
    - アイソパラメタリック4節点四角形要素
    - アイソパラメタリック8節点四角形要素
  - 三次元問題
    - アイソパラメタリック8節点6面体要素
- アイソパラメタリック要素と数値積分
  - 全体座標系での積分式を局所座標系に変換し実行
- 境界条件とその与え方
  - Dirichlet境界
  - Neumann境界