3.5 構成則

- 構成則(Constitutive equation)
  - 応力～ひずみ関係、力学（数学）モデル、構成関係とも呼ばれる。
  - 応力（応力速度）とひずみ（ひずみ速度）の関係式

$$\dot{\sigma}'_{ij} \sim \dot{\varepsilon}_{kl} \qquad \dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}$$

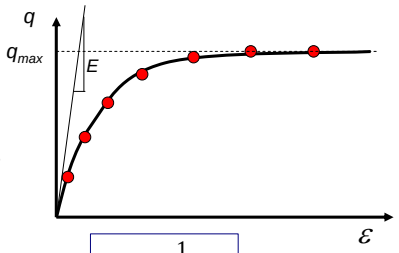
  - 物体の変形のしやすさなどを表現する。

土の構成則（力学モデル）の種類

- 双曲線モデル
- 弾性モデル
  - 線形弾性モデル
  - 非線形弾性モデル
    - 等価線形弾性モデル
- 弾塑性モデル
  - 弾完全塑性モデル
  - ひずみ硬化型モデル
  - ひずみ硬化・軟化型モデル
- 弾粘塑性モデル
  - レオロジー（時間依存性挙動の表現）

■双曲線モデル（数学モデル）

- 変形係数と圧縮強度を用いて応力～ひずみ曲線を近似する。
- パラメータは2つなので簡単：EとS
- 圧縮応力や圧縮ひずみが単調増加の予測には適しているが、除荷を含む挙動には不向き
- 一般的に土の変形係数と圧縮強度は、応力履歴や拘束圧に依存する。
- ひずみ軟化を伴う地盤材料の表現はできない。



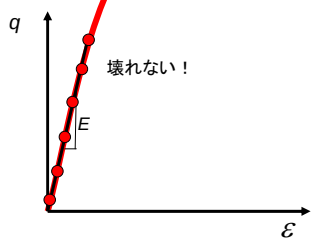
$$q = \frac{1}{\frac{1}{E\varepsilon} + \frac{1}{q_{max}}}$$

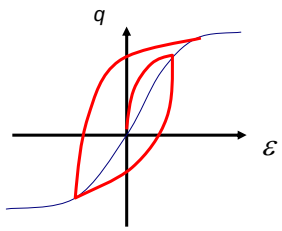
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial q}{\partial \varepsilon} = E \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} q = q_{max}$$

■弾性モデル（弾性論に基づくモデル）

- 線形弾性モデル
  - 等方線形弾性モデル
  - 異方線形弾性モデル
- 非線形弾性モデル
  - 等価線形弾性モデル
    - HDモデル
    - ORモデル

$$q = E\varepsilon$$



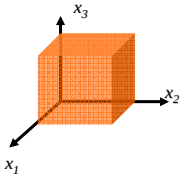


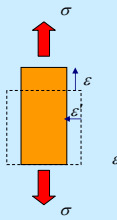
壊れない！が、剛性を低下させ、
見かけ上壊れたように見せることができる。

■弾性モデル（弾性論に基づくモデル）

- 線形弾性モデル
  - 等方線形弾性モデル

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}\left\{\sigma'_{11}-\nu\left(\sigma'_{22}+\sigma'_{33}\right)\right\}$$
$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{E}\left\{\sigma'_{22}-\nu\left(\sigma'_{33}+\sigma'_{11}\right)\right\}$$
$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{E}\left\{\sigma'_{33}-\nu\left(\sigma'_{11}+\sigma'_{22}\right)\right\}$$
$$\gamma_{12}=\frac{1}{G}\sigma'_{12}$$
$$\gamma_{23}=\frac{1}{G}\sigma'_{23}$$
$$\gamma_{31}=\frac{1}{G}\sigma'_{31}$$



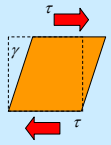


$\sigma=E\varepsilon$

E 縦弾性係数、ヤング率

$\varepsilon'=-\nu\varepsilon$

ν ポアソン比



$\tau=G\gamma$

G せん断弾性係数

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■弾性モデル（弾性論に基づくモデル）

- 線形弾性モデル
  - 等方線形弾性モデル

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}\left\{\sigma'_{11}-\nu\left(\sigma'_{22}+\sigma'_{33}\right)\right\}$$
$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{E}\left\{\sigma'_{22}-\nu\left(\sigma'_{33}+\sigma'_{11}\right)\right\}$$
$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{E}\left\{\sigma'_{33}-\nu\left(\sigma'_{11}+\sigma'_{22}\right)\right\}$$
$$\gamma_{12}=\frac{1}{G}\sigma'_{12}$$
$$\gamma_{23}=\frac{1}{G}\sigma'_{23}$$
$$\gamma_{31}=\frac{1}{G}\sigma'_{31}$$

体積ひずみ

$$\varepsilon_v=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$$
$$=\frac{1}{E}\left\{\left(\sigma'_{11}+\sigma'_{22}+\sigma'_{33}\right)-2\nu\left(\sigma'_{11}+\sigma'_{22}+\sigma'_{33}\right)\right\}$$
$$=\frac{3(1-2\nu)}{E}p'$$

$$\boxed{p'=K\varepsilon_v}\qquad K=\frac{E}{3(1-2\nu)}$$ 体積弾性係数

せん断ひずみ

$$\gamma=\sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}}\qquad \boxed{q=G\gamma}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■弾性モデル（弾性論に基づくモデル）

- 線形弾性モデル
  - 等方線形弾性モデル

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}\left\{\sigma'_{11}-\nu\left(\sigma'_{22}+\sigma'_{33}\right)\right\}$$
$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{E}\left\{\sigma'_{22}-\nu\left(\sigma'_{33}+\sigma'_{11}\right)\right\}$$
$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{E}\left\{\sigma'_{33}-\nu\left(\sigma'_{11}+\sigma'_{22}\right)\right\}$$
$$\gamma_{12}=\frac{1}{G}\sigma'_{12}$$
$$\gamma_{23}=\frac{1}{G}\sigma'_{23}$$
$$\gamma_{31}=\frac{1}{G}\sigma'_{31}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sigma'_{11}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{(1-\nu)\varepsilon_{11}-\nu\left(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}\right)\right\}$$
$$\sigma'_{22}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{(1-\nu)\varepsilon_{22}-\nu\left(\varepsilon_{33}+\varepsilon_{11}\right)\right\}$$
$$\sigma'_{33}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{(1-\nu)\varepsilon_{11}-\nu\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)\right\}$$
$$\sigma'_{12}=G\gamma_{12}\qquad \sigma'_{23}=G\gamma_{23}\qquad \sigma'_{31}=G\gamma_{31}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

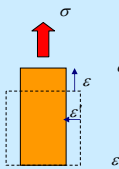
■弾性モデル（弾性論に基づくモデル）

- 線形弾性モデル
  - 等方線形弾性モデル

材料定数

E: 縦弾性係数
G: せん断弾性係数
K: 体積弾性係数
ν: ポアソン比

$$\boxed{G=\frac{E}{2(1+\nu)}}\qquad \boxed{\nu=\frac{E-2G}{2G}}$$
$$\boxed{E=2G(1+\nu)}\qquad \boxed{K=\frac{E}{3(1-2\nu)}}$$

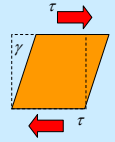


$\sigma=E\varepsilon$

E 縦弾性係数、ヤング率

$\varepsilon'=-\nu\varepsilon$

ν ポアソン比



$\tau=G\gamma$

G せん断弾性係数

■弾性モデル（弾性論に基づくモデル）

- 線形弾性モデル $\sigma'_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$
  - 材料が等方性を有する
  - 応力テンソルの対称性
  - ひずみテンソルの対称性

$$E_{ijkl} = \tilde{\lambda}\delta_{ij}\delta_{kl} + \tilde{\mu}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

$\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ ラメ定数

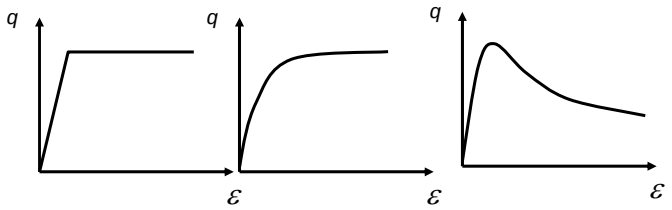
$$\tilde{\lambda} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \tilde{\mu} = G$$

$$E_{ijkl} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + G\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

$$E_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + G\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

■弾塑性モデル（弾性論＋塑性論に基づくモデル）

- 弾完全塑性モデル
- ひずみ硬化型弾塑性モデル
- ひずみ硬化・軟化型弾塑性モデル



■弾塑性モデル

- ひずみ速度成分の加算分解

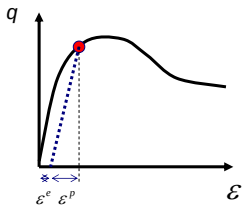
$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \qquad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^e_{ij} + \dot{\varepsilon}^p_{ij}$$

- 弾性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}^e_{ij}$
  - 可逆的な成分

$$\dot{\sigma}'_{ij} = E_{ijkl}\dot{\varepsilon}^e_{kl}$$

等方性であれば、

$$E_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + G\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

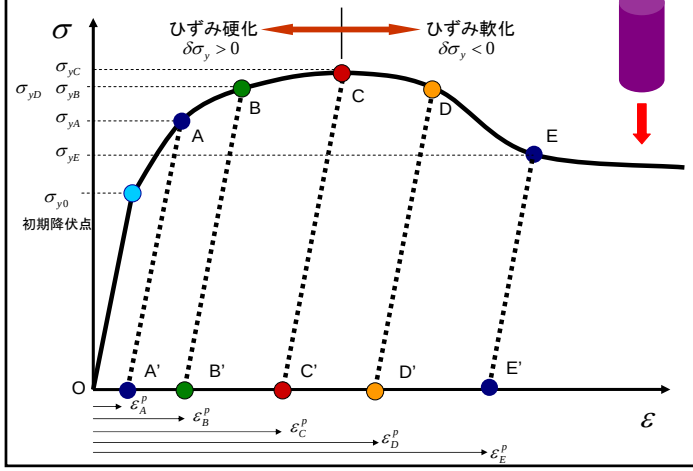


- 塑性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$
  - 不可逆的な成分

■弾塑性モデル

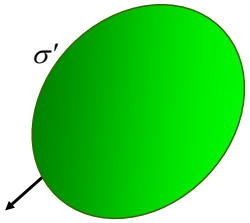
- 塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$
  - 弾性状態 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \mathbf{0}$ $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$
    - 塑性変形が生じないので、変形前後の材料は本質的に変化しない。
  - 弾塑性状態 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \neq \mathbf{0}$ $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$
    - 塑性変形が生じることによって、変形前と後では、材料特性は変化していると考えられる。
    - 塑性変形を生じる状態を降伏状態と呼ぶ。
    - 塑性変形が生じる応力レベルであるか否かを判定する条件を降伏条件と呼ぶ。

塑性ひずみ増加に伴う降伏値の変化



■弾塑性モデル

- 3次元応力状態での降伏条件
  - 塑性変形が生じる応力状態であるか否かを判定する条件
  - 塑性変形が生じる応力状態を表す関数を降伏関数と呼ぶ。
  - 応力空間において降伏関数が呈する曲面を降伏曲面と呼ぶ。



$$f(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{H}) = 0$$

$\mathbf{H}$ 塑性履歴パラメータ

$f(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{H}) < 0$ のとき弾性状態

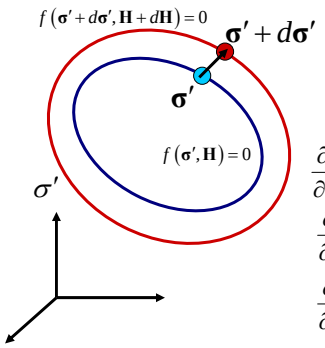
■弾塑性モデル

塑性変形に伴う降伏曲面の拡大と縮小

- 塑性変形中、応力点は常に降伏曲面上に存在する。（適合条件）

$$df(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{H}) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}} = 0$$



$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\dot{\boldsymbol{\sigma}}' > 0$ ひずみ硬化（降伏曲面は拡大）

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = 0$ 中立負荷（降伏曲面は変化しない）

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\dot{\boldsymbol{\sigma}}' < 0$ ひずみ軟化（降伏曲面は縮小）

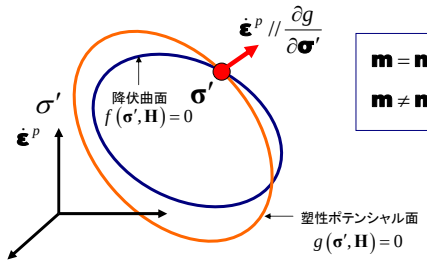
■弾塑性モデル　流れ則（流動則）

- 塑性ひずみの生じる方向を規定する。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\mathbf{m}, \mathbf{m} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \Big/ \left\| \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right\|$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} m_{ij}, m_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}} \Big/ \left\| \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right\|$$

$g(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{H})$ 塑性ポテンシャル関数　$\dot{\lambda}$ 非負のスカラー関数



$\mathbf{m} = \mathbf{n}$ 関連流れ則（関連流動則）

$\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$ 非関連流れ則（非関連流動則）

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \Big/ \left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right\|$$

■弾塑性モデル（基本となる考え方のまとめ）

- ひずみ速度成分の加算分解

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$$

  - 弾性ひずみ速度

$$\dot{\sigma}'_{ij} = E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}^{e}$$

  - 塑性ひずみ速度
    - 流れ則

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \dot{\lambda} m_{ij} \qquad m_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}} \Big/ \left\| \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right\|$$

    - 降伏条件（塑性変形が生じる条件）

$$f(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{H}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}} = 0$$ （適合条件）

降伏関数と塑性ポテンシャル関数を決め、塑性履歴パラメータの変化則を決める！
→応力速度～ひずみ速度関係式が誘導できる。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■弾塑性モデル（基本となる考え方のまとめ）

- ひずみ速度成分の加算分解

関連流動則を仮定すると

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$$

  - 弾性ひずみ速度

$$\dot{\sigma}'_{ij} = E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}^{e}$$

  - 塑性ひずみ速度
    - 流れ則＝関連流動則

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \dot{\lambda} n_{ij} \qquad n_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \Big/ \left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right\|$$

    - 降伏条件（塑性変形が生じる条件）

$$f(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{H}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}} = 0$$ （適合条件）

降伏関数を決め、塑性履歴パラメータの変化則を決める！
→応力速度～ひずみ速度関係式が誘導できる。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

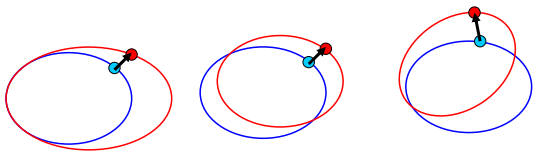
■弾塑性モデル

- 塑性変形に伴う降伏曲面の大きさと形などの変化のルールを決める
  - 塑性変形が生じても常に降伏曲面が変化しない
    - ひずみ硬化しない＝弾完全塑性モデル
      - Misesモデル
      - Drucker-Pragerモデル
      - モールクーロンモデル
  - 塑性変形が生じると降伏曲面が変化する
    - ひずみ硬化・軟化するモデル＝一般的な弾塑性モデル
      - Cam-clayモデル
      - 修正Cam-clayモデル
      - 関口・太田モデル
      - ・・・・など

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■弾塑性モデル

- 塑性変形が生じると降伏曲面が変化する
  - ひずみ硬化・軟化するモデル＝一般的な弾塑性モデル



等方硬化	移動硬化	回転硬化 （with 形状の変化）
拘束圧依存性	繰返し塑性	応力誘導異方性 繰返し塑性

弾塑性モデル：飽和土の力学特性と代表的な弾塑性モデル

- 拘束圧依存性
- 異方性
  - 固有異方性（初期異方性）
  - 応力誘導異方性
- 繰返し塑性
- 粒子破砕性
- 速度依存性（時間依存性）
- 固結力（セメンテーション）
- ・・・・など

Cam-clayモデル
修正Cam-clayモデル

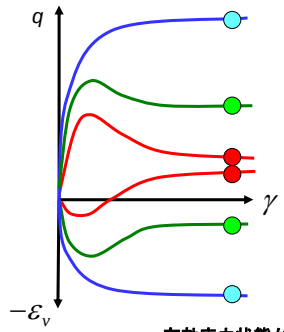
等方硬化

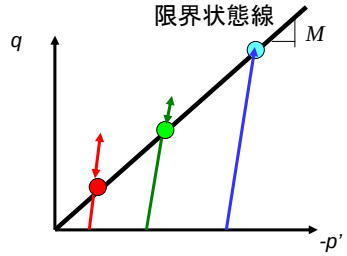
関口・太田モデル
（速度依存性を考慮しないもの）

関口・太田モデル
（速度依存性を考慮したもの）

弾塑性モデル　Cam-clayモデル・修正Cam-clayモデル

- 限界状態の概念





限界状態

$$\dot{\sigma}'_{ij}=0 \quad \dot{\varepsilon}_v=0 \quad \dot{\gamma}\neq 0$$

有効応力状態が一定の状態で、体積変化が生じることなく、せん断ひずみが生じる状態

Cam-clayモデル・修正Cam-clayモデル

- Cam-clayモデルの降伏関数の誘導
  - ある応力状態にある飽和土が外力増分により塑性変形を生じたとする。
  - その時の内部消散仕事率を考える。 $\dot{W}^p=\sigma'_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}$
  - 偏差応力テンソルと塑性偏差ひずみ速度テンソルの方向が一致すると仮定する。

$$\dot{W}^p=p'\dot{\varepsilon}^p_v+q\dot{\gamma}^p$$

  - この内部消散仕事率が、限界状態において消費される内部消散仕事率に等しいと仮定する。

$$\dot{W}^p=Mp'\dot{\gamma}^p$$

  - これより、$p'\dot{\varepsilon}^p_v+q\dot{\gamma}^p=Mp'\dot{\gamma}^p$ が得られる。

$$\frac{\dot{\varepsilon}^p_v}{\dot{\gamma}^p}=M-\frac{q}{p'}$$

  - 関連流動則を仮定すると、

$$\frac{\dot{\varepsilon}^p_v}{\dot{\gamma}^p}=\frac{\partial f/\partial p}{\partial f/\partial q}=-\frac{1}{dq/dp} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dp'}=-\left(M-\frac{q}{p'}\right)$$

Cam-clayモデル・修正Cam-clayモデル

- Cam-clayモデルの降伏関数の誘導（つづき）
  - $\frac{dq}{dp'}=-\left(M-\frac{q}{p'}\right)$ において、q=0のときp'=p'$_y$とし、微分方程式を解く。

$$p'\exp\left(\frac{q/p'}{M}\right)-p_y=0$$

Cam-clayモデルの降伏曲面

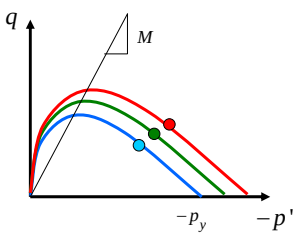
p_y　圧密降伏応力←塑性履歴パラメータ

- 修正Cam-clayモデルの降伏関数
  - 仕事率の仮定で、次式を導入している。 $\dot{W}^p=p'\sqrt{\left(\dot{\varepsilon}^p_v\right)^2+\left(M\dot{\gamma}^p\right)^2}$
  - 同様なプロセスで得られる降伏関数は、

$$p'\frac{M^2+(q/p')^2}{M^2}-p_y=0$$

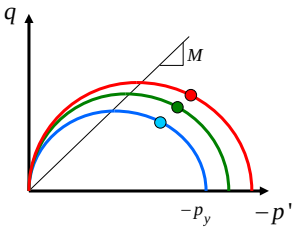
修正Cam-clayモデルの降伏曲面

Cam-clayモデル・修正Cam-clayモデル



$$p'\exp\left(\frac{q/p'}{M}\right)-p_y=0$$

Cam-clayモデルの降伏曲面



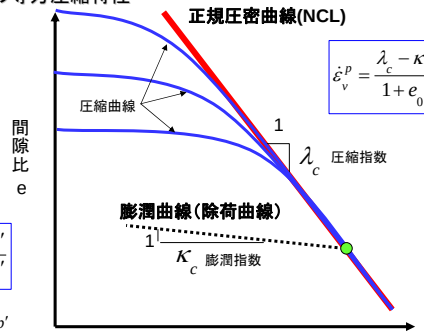
$$p'\frac{M^2+(q/p')^2}{M^2}-p_y=0$$

修正Cam-clayモデルの降伏曲面

p_y　圧密降伏応力←塑性履歴パラメータ

Cam-clayモデル・修正Cam-clayモデル

- 飽和土の等方圧縮特性



$$\dot{\varepsilon}_v^p=\frac{\lambda_c-\kappa_c}{1+e_0}\frac{\dot{p}_y}{p_y}=D_c\frac{\dot{p}_y}{p_y}$$

$$D_c=\frac{\lambda_c-\kappa_c}{1+e_0}$$

$$\dot{\varepsilon}_v^e=\frac{\kappa_c}{1+e_0}\frac{\dot{p}'}{p'}$$

$$K=\frac{1+e_0}{\kappa_c}p'$$

体積弾性係数

圧密降伏応力 $-p_y$

Cam-clayモデル・修正Cam-clayモデル

- 応力速度～ひずみ速度関係の誘導（満たすべき関係式の整理）
  - 弾性ひずみ速度

$$\dot{\sigma}'_{ij}=E_{ijkl}\dot{\varepsilon}^e_{kl}$$

$$E_{ijkl}=\left(K-\frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl}+G\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)\qquad K=\frac{1+e_0}{\kappa_c}p'\qquad G=\frac{3(1-2\nu)K}{2(1+\nu)}$$

  - 塑性ひずみ速度
    - 流れ則＝関連流動則

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij}=\dot{\lambda}n_{ij}\qquad n_{ij}=\frac{\partial f}{\partial\sigma'_{ij}}\Big/\left\|\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}'}\right\|$$

    - 降伏条件（塑性変形が生じる条件）$f(\boldsymbol{\sigma}')-F(\mathbf{H})=0$

$$f(\boldsymbol{\sigma}')=p'\exp\left(\frac{q/p'}{M}\right)\qquad F(\mathbf{H})=p_y$$

Cam-clayモデル

$$f(\boldsymbol{\sigma}')=p'\frac{M^2+(q/p')^2}{M^2}\qquad F(\mathbf{H})=p_y$$

修正Cam-clayモデル

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma'_{ij}}\dot{\sigma}'_{ij}-\frac{\partial F}{\partial p_y}\dot{p}_y=0$$

（適合条件）

    - 降伏曲面の拡大・縮小のルール（塑性履歴パラメータの経験則）

$$\dot{\varepsilon}^p_v=\frac{\lambda_c-\kappa_c}{1+e_0}\frac{\dot{p}_y}{p_y}=D_c\frac{\dot{p}_y}{p_y}$$

Cam-clayモデル・修正Cam-clayモデル

- 応力速度～ひずみ速度関係の誘導
  - 適合条件に塑性体積ひずみ速度関係式を代入し、整理する。

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma'_{ij}}\dot{\sigma}'_{ij}-\frac{\partial F}{\partial p_y}\dot{p}_y=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial\sigma'_{ij}}\dot{\sigma}'_{ij}-\frac{p_y}{D_c}\dot{\varepsilon}^p_v=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial\sigma'_{ij}}\dot{\sigma}'_{ij}-\frac{f(\boldsymbol{\sigma}')}{D_c}\dot{\varepsilon}^p_v=0$$

  - 関連流動則より、$\dot{\varepsilon}^p_v=\dot{\varepsilon}^p_{ij}\delta_{ij}=\dot{\lambda}n_{ij}\delta_{ij}=\dot{\lambda}n_{kk}$

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma'_{ij}}\dot{\sigma}'_{ij}-\dot{\lambda}\frac{f(\boldsymbol{\sigma}')}{D_c}n_{kk}=0$$

  - 応力速度～弾性ひずみ速度関係に関連流動則を代入して、

$$\dot{\sigma}'_{ij}=E_{ijkl}\dot{\varepsilon}^e_{kl}=E_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl}-\dot{\varepsilon}^p_{kl}\right)=E_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl}-\dot{\lambda}n_{kl}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma'_{ij}}E_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl}-\dot{\lambda}n_{kl}\right)-\dot{\lambda}\frac{f(\boldsymbol{\sigma}')}{D_c}n_{kk}=0$$

  - $\dot{\lambda}$ について解く、

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma'_{ij}}E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}-\dot{\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma'_{ij}}E_{ijkl}n_{kl}+\frac{f(\boldsymbol{\sigma}')}{D_c}n_{kk}\right)=0$$

$$\dot{\lambda}=\frac{\frac{\partial f}{\partial\sigma'_{ij}}E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial\sigma'_{ij}}E_{ijkl}n_{kl}+\frac{f(\boldsymbol{\sigma}')}{D_c}n_{kk}}$$

Cam-clayモデル・修正Cam-clayモデル

- 応力速度～ひずみ速度関係の誘導（つづき）
  - 再び、応力速度～弾性ひずみ速度関係と関連流動則より、

$$\dot{\sigma}'_{ij} = E_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda} n_{kl}\right)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}}{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} E_{ijkl} n_{kl} + \dfrac{f(\boldsymbol{\sigma}')}{D_c} n_{kk}}$$

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \left(E_{ijkl} - \frac{E_{ijpq} n_{pq} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{mn}} E_{mnkl}}{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} E_{ijkl} n_{kl} + \dfrac{f(\boldsymbol{\sigma}')}{D_c} n_{rr}} \right) \dot{\varepsilon}_{kl}$$

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \left(E_{ijkl} - \frac{E_{ijpq} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{pq}} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{mn}} E_{mnkl}}{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} E_{ijkl} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{kl}} + \dfrac{f(\boldsymbol{\sigma}')}{D_c} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{kk}}} \right) \dot{\varepsilon}_{kl}$$

応力速度～ひずみ速度関係

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \qquad D_{ijkl} = E_{ijkl} - \frac{E_{ijpq} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{pq}} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{mn}} E_{mnkl}}{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} E_{ijkl} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{kl}} + \dfrac{f(\boldsymbol{\sigma}')}{D_c} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{kk}}}$$

Cam-clayモデル・修正Cam-clayモデル

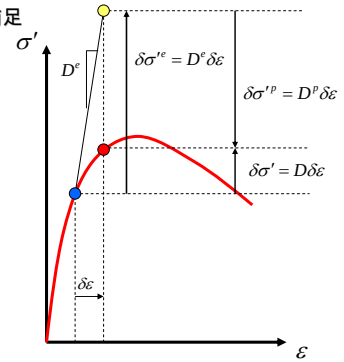
- 応力速度～ひずみ速度関係の補足

応力速度～ひずみ速度関係

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} = \left(D^e_{ijkl} - D^p_{ijkl}\right)\dot{\varepsilon}_{kl}$$

$$D^e_{ijkl} = E_{ijkl}$$

$$D^p_{ijkl} = \frac{E_{ijpq} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{pq}} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{mn}} E_{mnkl}}{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} E_{ijkl} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{kl}} + \dfrac{f(\boldsymbol{\sigma}')}{D_c} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{kk}}}$$



Cam-clayモデル・修正Cam-clayモデル

- 応力速度～ひずみ速度関係

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \left(E_{ijkl} - \frac{E_{ijpq} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{pq}} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{mn}} E_{mnkl}}{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} E_{ijkl} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{kl}} + \dfrac{f(\boldsymbol{\sigma}')}{D_c} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{kk}}} \right) \dot{\varepsilon}_{kl}$$

- 適合条件
- 関連流れ則
- 応力速度～弾性ひずみ速度関係

を満足する関係式である！

弾塑性状態

$$\dot{\sigma}'_{ij} = E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}$$

弾性状態

Cam-clayモデル・修正Cam-clayモデル

- 負荷規準：塑性変形が生じるための条件
  - 応力が降伏曲面上に存在する。

$$f(\boldsymbol{\sigma}') - p_y = 0$$

  - 関連流れ則のスカラー関数が正である。

$$\dot{\lambda} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}}{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} E_{ijkl} n_{kl} + \dfrac{f(\boldsymbol{\sigma}')}{D_c} n_{kk}} > 0$$

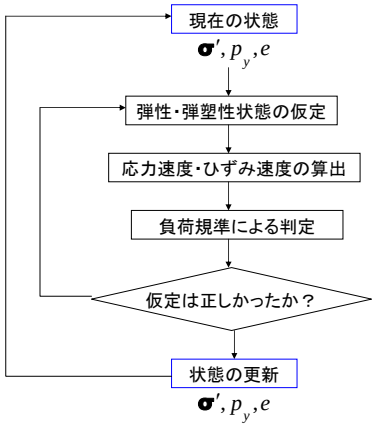
そうでないとき。。。

弾性状態

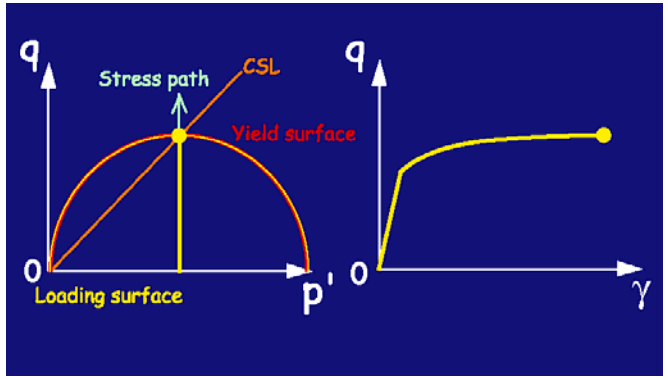
弾塑性状態

Cam-clayモデル・修正Cam-clayモデル

- 計算手順
- Cam-clayモデル
  - 材料定数と初期条件



計算過程の例



負荷基準

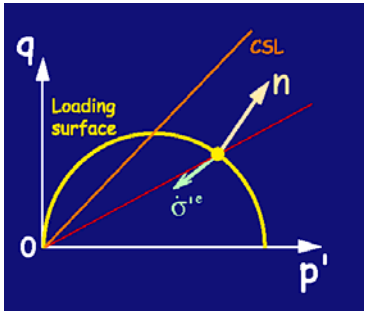
- 弾塑性負荷状態

$$n_{ij} E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \geq 0$$

$$\dot{\sigma}'^{e}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}$$

- 弾性除荷状態

$$n_{ij} E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} < 0$$

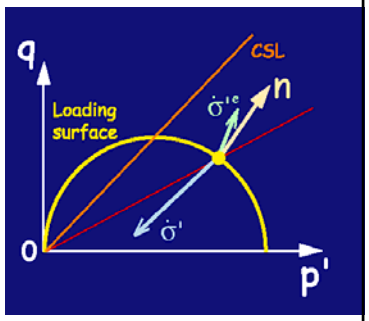


硬化と軟化

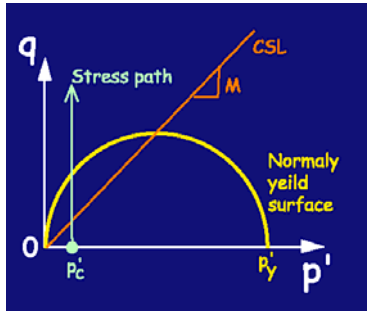
- 弾塑性負荷状態

$$n_{ij} E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \geq 0$$

- 硬化 $n_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} > 0$
- 中立負荷 $n_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} = 0$
- 軟化 $n_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} < 0$

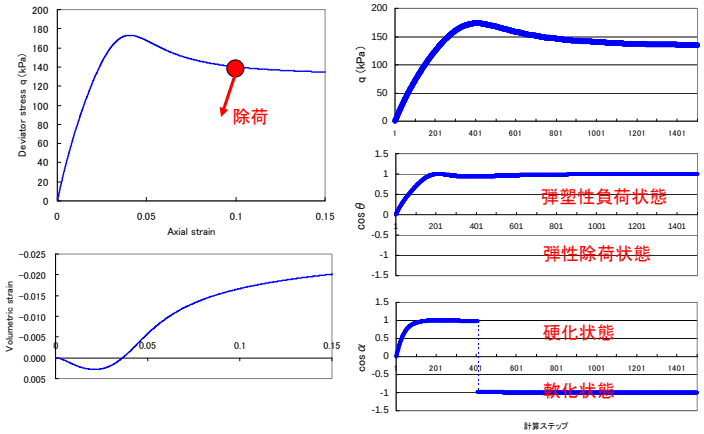


ex.過圧密粘土の排水三軸圧縮試験

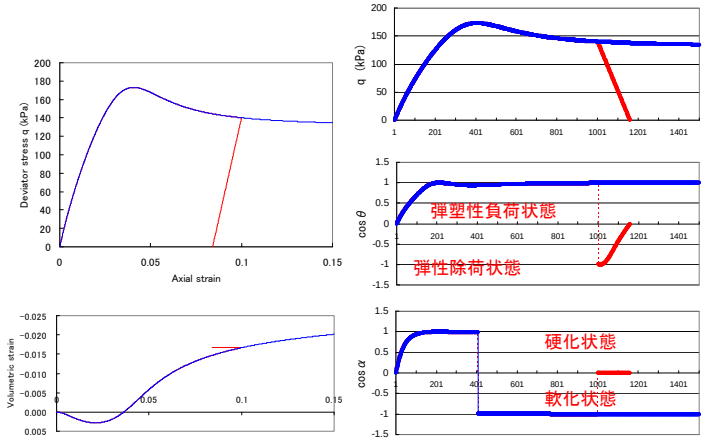


- 条件
  - λ =0.08
  - κ =0.04
  - M=1.3
  - ν =0.3

計算過程における負荷判定

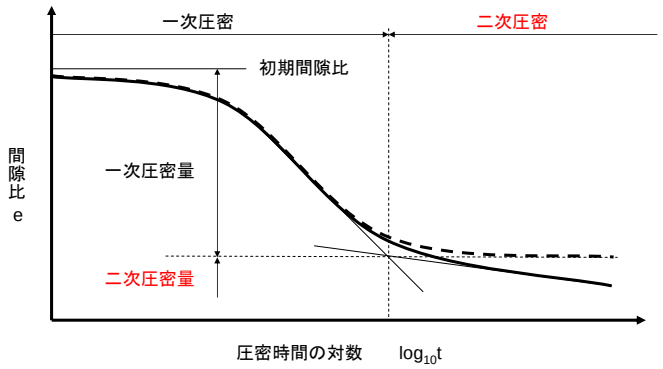


計算過程における負荷判定



■弾粘塑性モデル（弾性論＋塑性論＋粘性？に基づくモデル）

- 時間依存挙動を表現するためのモデル
  - 応力緩和やクリープ挙動など



■ 構成テンソルのマトリクス表示

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}$$

構成テンソル（4階のテンソル）

$$\tilde{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}' = \left\{\dot{\sigma}'_{11} \quad \dot{\sigma}'_{22} \quad \dot{\sigma}'_{33} \quad \dot{\sigma}'_{12} \quad \dot{\sigma}'_{23} \quad \dot{\sigma}'_{31} \quad \dot{\sigma}'_{31} \quad \dot{\sigma}'_{32} \quad \dot{\sigma}'_{21}\right\}^T$$

$$\tilde{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \left\{\dot{\varepsilon}_{11} \quad \dot{\varepsilon}_{22} \quad \dot{\varepsilon}_{33} \quad \dot{\varepsilon}_{12} \quad \dot{\varepsilon}_{23} \quad \dot{\varepsilon}_{31} \quad \dot{\varepsilon}_{31} \quad \dot{\varepsilon}_{32} \quad \dot{\varepsilon}_{21}\right\}^T$$

$$\tilde{\dot{\sigma}}'_i = \tilde{D}_{ij}\tilde{\dot{\varepsilon}}_j$$

構成テンソル（2階のテンソル）

構成マトリクス　*D-Matrix*

■ 構成関係（応力速度～ひずみ速度関係）

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}'_{11} \\ \dot{\sigma}'_{22} \\ \dot{\sigma}'_{33} \\ \dot{\sigma}'_{12} \\ \dot{\sigma}'_{23} \\ \dot{\sigma}'_{31} \\ \dot{\sigma}'_{13} \\ \dot{\sigma}'_{32} \\ \dot{\sigma}'_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1123} & D_{1131} & D_{1113} & D_{1132} & D_{1121} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2223} & D_{2231} & D_{2213} & D_{2232} & D_{2221} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3312} & D_{3323} & D_{3331} & D_{3313} & D_{3332} & D_{3321} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1212} & D_{1223} & D_{1231} & D_{1213} & D_{1232} & D_{1221} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2312} & D_{2323} & D_{2331} & D_{2313} & D_{2332} & D_{2321} \\ D_{3111} & D_{3122} & D_{3133} & D_{3112} & D_{3123} & D_{3131} & D_{3113} & D_{3132} & D_{3121} \\ D_{1311} & D_{1322} & D_{1333} & D_{1312} & D_{1323} & D_{1331} & D_{1313} & D_{1332} & D_{1321} \\ D_{3211} & D_{3222} & D_{3233} & D_{3212} & D_{3223} & D_{3231} & D_{3213} & D_{3232} & D_{3221} \\ D_{2111} & D_{2122} & D_{2133} & D_{2112} & D_{2123} & D_{2131} & D_{2113} & D_{2132} & D_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \\ \dot{\varepsilon}_{23} \\ \dot{\varepsilon}_{31} \\ \dot{\varepsilon}_{13} \\ \dot{\varepsilon}_{32} \\ \dot{\varepsilon}_{21} \end{Bmatrix}$$

ひずみ速度テンソルの対称性：

$$\dot{\varepsilon}_{12} = \dot{\varepsilon}_{21} \qquad \dot{\varepsilon}_{23} = \dot{\varepsilon}_{32} \qquad \dot{\varepsilon}_{31} = \dot{\varepsilon}_{13}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}'_{11} \\ \dot{\sigma}'_{22} \\ \dot{\sigma}'_{33} \\ \dot{\sigma}'_{12} \\ \dot{\sigma}'_{23} \\ \dot{\sigma}'_{31} \\ \dot{\sigma}'_{13} \\ \dot{\sigma}'_{32} \\ \dot{\sigma}'_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112}+D_{1121} & D_{1123}+D_{1132} & D_{1131}+D_{1113} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212}+D_{2221} & D_{2223}+D_{2232} & D_{2231}+D_{2213} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3312}+D_{3321} & D_{3323}+D_{3332} & D_{3331}+D_{3313} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1212}+D_{1221} & D_{1223}+D_{1232} & D_{1231}+D_{1213} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2312}+D_{2321} & D_{2323}+D_{2332} & D_{2331}+D_{2313} \\ D_{3111} & D_{3122} & D_{3133} & D_{3112}+D_{3121} & D_{3123}+D_{3132} & D_{3131}+D_{3113} \\ D_{1311} & D_{1322} & D_{1333} & D_{1312}+D_{1321} & D_{1323}+D_{1332} & D_{1331}+D_{1313} \\ D_{3211} & D_{3222} & D_{3233} & D_{3212}+D_{3221} & D_{3223}+D_{3232} & D_{3231}+D_{3213} \\ D_{2111} & D_{2122} & D_{2133} & D_{2112}+D_{2121} & D_{2123}+D_{2132} & D_{2131}+D_{2113} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \\ \dot{\varepsilon}_{23} \\ \dot{\varepsilon}_{31} \end{Bmatrix}$$

応力速度テンソルの対称性：$\dot{\sigma}'_{12} = \dot{\sigma}'_{21}$　$\dot{\sigma}'_{23} = \dot{\sigma}'_{32}$　$\dot{\sigma}'_{31} = \dot{\sigma}'_{13}$

$$D_{12kl} = D_{21kl} \qquad D_{23kl} = D_{32kl} \qquad D_{31kl} = D_{13kl}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}'_{11} \\ \dot{\sigma}'_{22} \\ \dot{\sigma}'_{33} \\ \dot{\sigma}'_{12} \\ \dot{\sigma}'_{23} \\ \dot{\sigma}'_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112}+D_{1121} & D_{1123}+D_{1132} & D_{1131}+D_{1113} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212}+D_{2221} & D_{2223}+D_{2232} & D_{2231}+D_{2213} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3312}+D_{3321} & D_{3323}+D_{3332} & D_{3331}+D_{3313} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1212}+D_{1221} & D_{1223}+D_{1232} & D_{1231}+D_{1213} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2312}+D_{2321} & D_{2323}+D_{2332} & D_{2331}+D_{2313} \\ D_{3111} & D_{3122} & D_{3133} & D_{3112}+D_{3121} & D_{3123}+D_{3132} & D_{3131}+D_{3113} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \\ \dot{\varepsilon}_{23} \\ \dot{\varepsilon}_{31} \end{Bmatrix}$$

ひずみ速度テンソルの対称性と式(1)の構成関係より

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} = D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{lk} = D_{ijlk}\dot{\varepsilon}_{kl}$$

$$D_{ijkl} = D_{ijlk}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}'_{11} \\ \dot{\sigma}'_{22} \\ \dot{\sigma}'_{33} \\ \dot{\sigma}'_{12} \\ \dot{\sigma}'_{23} \\ \dot{\sigma}'_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & 2D_{1112} & 2D_{1123} & 2D_{1131} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & 2D_{2212} & 2D_{2223} & 2D_{2231} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & 2D_{3312} & 2D_{3323} & 2D_{3331} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & 2D_{1212} & 2D_{1223} & 2D_{1231} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & 2D_{2312} & 2D_{2323} & 2D_{2331} \\ D_{3111} & D_{3122} & D_{3133} & 2D_{3112} & 2D_{3123} & 2D_{3131} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \\ \dot{\varepsilon}_{23} \\ \dot{\varepsilon}_{31} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}'_{11} \\ \dot{\sigma}'_{22} \\ \dot{\sigma}'_{33} \\ \dot{\sigma}'_{12} \\ \dot{\sigma}'_{23} \\ \dot{\sigma}'_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1123} & D_{1131} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2223} & D_{2231} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3312} & D_{3323} & D_{3331} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1212} & D_{1223} & D_{1231} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2312} & D_{2323} & D_{2331} \\ D_{3111} & D_{3122} & D_{3133} & D_{3112} & D_{3123} & D_{3131} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ 2\dot{\varepsilon}_{12} \\ 2\dot{\varepsilon}_{23} \\ 2\dot{\varepsilon}_{31} \end{Bmatrix}$$

$\dot{\gamma}_{12} = 2\dot{\varepsilon}_{12}$ $\dot{\gamma}_{23} = 2\dot{\varepsilon}_{23}$ $\dot{\gamma}_{31} = 2\dot{\varepsilon}_{31}$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}'_{11} \\ \dot{\sigma}'_{22} \\ \dot{\sigma}'_{33} \\ \dot{\sigma}'_{12} \\ \dot{\sigma}'_{23} \\ \dot{\sigma}'_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1123} & D_{1131} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2223} & D_{2231} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3312} & D_{3323} & D_{3331} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1212} & D_{1223} & D_{1231} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2312} & D_{2323} & D_{2331} \\ D_{3111} & D_{3122} & D_{3133} & D_{3112} & D_{3123} & D_{3131} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ \dot{\gamma}_{12} \\ \dot{\gamma}_{23} \\ \dot{\gamma}_{31} \end{Bmatrix}$$

構成マトリクス　*D-Matrix*　3次元問題

2次元の平面ひずみ状態では、 $\dot{\varepsilon}_{33} = \dot{\gamma}_{23} = \dot{\gamma}_{31} = 0$　$\dot{\sigma}'_{23} = \dot{\sigma}'_{31} = 0$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}'_{11} \\ \dot{\sigma}'_{22} \\ \dot{\sigma}'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1112} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2212} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\gamma}_{12} \end{Bmatrix}$$

注意
$\dot{\sigma}'_{33} = 0$ **ではない！**

3.5　構成則＜まとめ＞

- 構成関係
  - 双曲線モデル
  - 弾性モデル
  - 弾塑性モデル
    - 降伏関数、降伏面
    - 流動則
    - Cam-clayモデル、修正Cam-clayもでる。
    - 応力～ひずみ関係の誘導
    - 弾塑性負荷・弾性除荷の判定基準（負荷規準）
  - 弾粘塑性モデル
- 応力速度～ひずみ速度関係
  - 構成マトリックス、D-Matrix