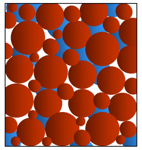
3.3 地盤が満足すべき基本則

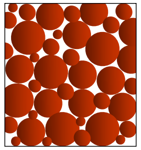
- 土の質量保存則
  - 土粒子部の連続の式
  - 間隙部の連続の式
- 力の釣合い式
  - 速度型の力の釣合い式
- 飽和地盤が満足すべき関係式

Advanced Geotechnical

土の質量保存則



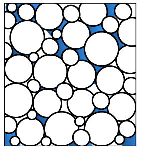
- 土
  - 土粒子部
  - 間隙部
    - 間隙水
    - 間隙空気



土粒子

$$\theta^s = \frac{V^s}{V} = 1 - n$$

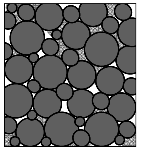
$$\rho_s^* = \rho_d = (1-n)\rho_s = \theta^s \rho_s$$



間隙水

$$\theta^w = \frac{V^w}{V} = \frac{Sr \cdot V^v}{V} = nS_r$$

$$\rho_w^* = \rho_w \theta^w$$



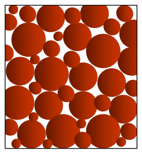
間隙空気

$$\theta^a = \frac{V^a}{V} = 1 - \theta^s - \theta^w = n(1 - S_r)$$

$$\rho_a^* = \rho_a \theta^a + \rho_a h_s \theta^w$$

h_s 間隙水に溶け込んでいる空気の溶解率

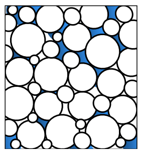
hnical Numerical Analysis



土粒子

$$\theta^s = \frac{V^s}{V} = 1 - n$$

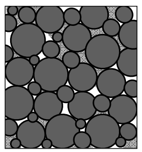
$$\frac{\partial \theta^s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(-n) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{V^v}{V}\right) = -\frac{\dot{V}^v}{V} = -\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}$$



間隙水

$$\theta^w = \frac{V^w}{V} = \frac{Sr \cdot V^v}{V} = nS_r$$

$$\frac{\partial \theta^w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V^w}{V}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Sr \cdot V^v}{V}\right) = S_r \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + n \frac{\partial S_r}{\partial t}$$



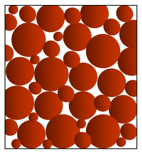
間隙空気

$$\theta^a = \frac{V^a}{V} = 1 - \theta^s - \theta^w = n(1 - S_r)$$

$$\frac{\partial \theta^a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{n(1-S_r)\right\} = (1-S_r)\frac{\partial n}{\partial t} - n\frac{\partial S_r}{\partial t} = (1-S_r)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - n\frac{\partial S_r}{\partial t}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

土粒子部の質量保存則



土粒子

$$\theta^s = \frac{V^s}{V}$$

$$\rho_s^* = \theta^s \rho_s$$

$$\frac{\partial \theta^s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V^s}{V}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V - V^v}{V}\right) = -\frac{\dot{V}^v}{V} = -\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}$$

体積ひずみ速度

$$\theta^s \mathbf{v}^{*s} = \mathbf{v}^s = \mathbf{v}$$ 土骨格の変位速度

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0$$ 連続の式①

↓

$$\frac{\partial(\theta^s \rho_s)}{\partial t} + \frac{\partial \theta^s \rho_s v_i^{*s}}{\partial x_i} = 0$$

↓ $\rho_s = const.$

$$\frac{\partial \theta^s}{\partial t} + \frac{\partial \theta^s v_i^{*s}}{\partial x_i} = 0$$

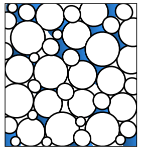
↓

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$ 土粒子部の質量保存則

変位速度～ひずみ速度関係を仮定することによって、土粒子部の質量保存則は満足している。

変位速度～ひずみ速度関係から得られる体積ひずみ速度そのものであることに注目。

間隙水の質量保存則



間隙水

$$\theta^w = \frac{V^w}{V}$$

$$\rho_w^* = \rho_w \theta^w$$

$$\frac{\partial \theta^w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V^w}{V}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Sr \cdot V^v}{V}\right) = S_r \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + n\dot{S}_r$$

$\theta^w \mathbf{v}^{*w} = \mathbf{v}^w$　透水速度

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0$$ 連続の式①

$$\frac{\partial(\theta^w \rho_w)}{\partial t} + \frac{\partial \theta^w \rho_w v_i^{*w}}{\partial x_i} = 0$$

$\rho_w = const.$

$$\frac{\partial \theta^w}{\partial t} + \frac{\partial \theta^w v_i^{*w}}{\partial x_i} = 0$$

$$S_r \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + n \frac{\partial S_r}{\partial t} + \frac{\partial v_i^w}{\partial x_i} = 0$$

間隙水の質量保存則

地盤の変形を考慮した
間隙水の連続の式

地盤が飽和状態である場合

$S_r = 1$　$\frac{\partial S_r}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \frac{\partial v_i^w}{\partial x_i} = 0$$

地盤の変形を考慮した
飽和地盤における間隙水の連続の式

間隙水の質量保存則（つづき）

間隙水の質量保存則　$$S_r \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + n \frac{\partial S_r}{\partial t} + \frac{\partial v_i^w}{\partial x_i} = 0$$　地盤の変形を考慮した間隙水の連続の式

変形問題

◎地盤が飽和状態である場合

$S_r = 1$　$\frac{\partial S_r}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \frac{\partial v_i^w}{\partial x_i} = 0$$

◎地盤が飽和状態で、
間隙水の流れが拘束を受けない場合

（間隙水の出入りが自由）

$$div(\mathbf{v}^w) + div(\mathbf{v}^s) = \frac{\partial v_i^w}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

（土粒子部の質量保存則に一致）

浸透問題

◎地盤の変形が無視できる場合

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = 0$$

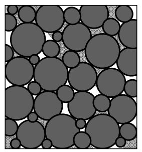
$$n \frac{\partial S_r}{\partial t} + \frac{\partial v_i^w}{\partial x_i} = 0$$

◎地盤が飽和状態で、
地盤の変形が無視できる場合

$S_r = 1$　$\frac{\partial S_r}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial v_i^w}{\partial x_i} = 0$$

間隙空気の質量保存則



間隙空気

$$\theta^a = \frac{V^a}{V}$$

$$\rho_a^* = \rho_a \theta^a + \rho_a h_s \theta^w$$

h_s 間隙水に溶け込んでいる空気の溶解率

$\theta^w \mathbf{v}^{*w} = \mathbf{v}^w$　透水速度

$\theta^a \mathbf{v}^{*a} = \mathbf{v}^a$　透気速度

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0$$ 連続の式①

$$\frac{\partial \rho_a^*}{\partial t} + \frac{\partial \rho_a^* v_i^{*aw}}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho_a \theta^a + \rho_a h_s \theta^w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_a \theta^a v_i^{*a} + \rho_a h_s \theta^w v_i^{*w})}{\partial x_i} = 0$$

$\rho_w = const.$　$\rho_a = const.$　$h_s = const.$　を仮定

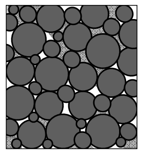
※間隙空気は大気に開放されている

$$\frac{\partial \theta^a}{\partial t} + h_s \frac{\partial \theta^w}{\partial t} + \frac{\partial(\theta^a v_i^{*a})}{\partial x_i} + h_s \frac{\partial(\theta^w v_i^{*w})}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \theta^a}{\partial t} + h_s \frac{\partial \theta^w}{\partial t} + \frac{\partial v_i^a}{\partial x_i} + h_s \frac{\partial v_i^w}{\partial x_i} = 0$$

間隙空気の質量保存則

$$\frac{\partial \theta^a}{\partial t} + h_s \frac{\partial \theta^w}{\partial t} + \frac{\partial v_i^a}{\partial x_i} + h_s \frac{\partial v_i^w}{\partial x_i} = 0$$



間隙空気

$$(1 - S_r)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - n \frac{\partial S_r}{\partial t} + h_s \left\{ S_r \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + n \frac{\partial S_r}{\partial t} \right\} + \frac{\partial v_i^a}{\partial x_i} + h_s \frac{\partial v_i^w}{\partial x_i} = 0$$

$$(1 - S_r + h_s S_r)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - (1 - h_s) n \frac{\partial S_r}{\partial t} + \frac{\partial v_i^a}{\partial x_i} + h_s \frac{\partial v_i^w}{\partial x_i} = 0$$

地盤の変形を考慮した間隙空気の連続の式

地盤が乾燥状態

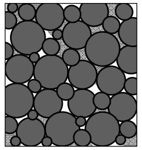
$S_r = 0$　$\frac{\partial S_r}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \frac{\partial v_i^a}{\partial x_i} = 0$$

地盤の変形を考慮した乾燥地盤における
間隙空気の連続の式

地盤が不飽和状態

間隙空気の質量保存則



間隙空気

地盤の変形を考慮した間隙空気の連続の式

$$\left(1-S_r+h_sS_r\right)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}-\left(1-h_s\right)n\frac{\partial S_r}{\partial t}+\frac{\partial v_i^a}{\partial x_i}+h_s\frac{\partial v_i^w}{\partial x_i}=0$$

地盤の変形を考慮した間隙水の連続の式

$$S_r\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}+n\frac{\partial S_r}{\partial t}+\frac{\partial v_i^w}{\partial x_i}=0$$

h_s を両辺に乗じる

$$\left(1-S_r\right)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}-n\frac{\partial S_r}{\partial t}+\frac{\partial v_i^a}{\partial x_i}=0$$

地盤の変形を考慮した間隙空気の連続の式②

$$div\left(\mathbf{v}^w\right)+div\left(\mathbf{v}^a\right)+div\left(\mathbf{v}^s\right)=0$$

（間隙空気の出入りが自由）

$$S_r\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}+n\frac{\partial S_r}{\partial t}+\frac{\partial v_i^w}{\partial x_i}=0$$

地盤の変形を考慮した間隙空気の連続の式③

地盤の変形を考慮した間隙水の連続の式に一致

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

間隙空気の質量保存則（つづき）

間隙空気の質量保存則

$$\left(1-S_r\right)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}-n\frac{\partial S_r}{\partial t}+\frac{\partial v_i^a}{\partial x_i}=0$$

地盤の変形を考慮した
間隙空気の連続の式

変形問題

◎地盤が乾燥状態である場合

$$S_r=0 \qquad \frac{\partial S_r}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}+\frac{\partial v_i^a}{\partial x_i}=0$$

◎間隙空気の流れが拘束を受けない場合

（間隙空気の出入りが自由）

$$div\left(\mathbf{v}^w\right)+div\left(\mathbf{v}^a\right)+div\left(\mathbf{v}^s\right)=0$$

$$S_r\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}+n\frac{\partial S_r}{\partial t}+\frac{\partial v_i^w}{\partial x_i}=0$$

（間隙水の質量保存則に一致）

◎地盤の変形が無視できる場合

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}=0$$

$$n\frac{\partial S_r}{\partial t}-\frac{\partial v_i^a}{\partial x_i}=0$$

浸透問題

◎地盤が乾燥状態で、
間隙空気の流れが拘束を受けない場合

（間隙空気の出入りが自由）

$$div\left(\mathbf{v}^a\right)+div\left(\mathbf{v}^s\right)=\frac{\partial v_i^a}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i^s}{\partial x_i}=0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

（土粒子部の質量保存則に一致）

◎地盤の変形が無視でき、間隙空気の流れが
拘束を受けない場合

$$div\left(\mathbf{v}^w\right)+div\left(\mathbf{v}^a\right)=0$$

$$n\frac{\partial S_r}{\partial t}+\frac{\partial v_i^w}{\partial x_i}=0$$

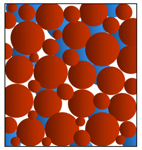
（地盤の変形を無視できる間隙水の連続の式に一致）

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

力の釣合い式

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{ji}}{\partial x_i}=0$$

物体力の時間変化が無視できる場合の
速度型力の釣合い式



◎飽和状態の場合

$$\dot{\sigma}_{ij}=\dot{\sigma}'_{ij}+\dot{u}^w\delta_{ij}$$ 応力分担式

$$\frac{\partial \dot{\sigma}'_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial \dot{u}^w}{\partial x_i}=0$$

◎乾燥状態の場合

$$\dot{\sigma}_{ij}=\dot{\sigma}'_{ij}+\dot{u}^a\delta_{ij}$$ 応力分担式

$$\frac{\partial \dot{\sigma}'_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial \dot{u}^a}{\partial x_i}=0$$

変形問題

◎飽和状態で、
間隙水圧の時間変化が無い場合

$$\dot{u}^w=0$$

$$\frac{\partial \dot{\sigma}'_{ij}}{\partial x_i}=0$$

◎乾燥状態で、
間隙空気圧の時間変化が無い場合

$$\dot{u}^a=0$$

$$\frac{\partial \dot{\sigma}'_{ij}}{\partial x_i}=0$$

間隙水圧or間隙空気圧
の時間変化が無い

$$\dot{u}^w=0 \qquad \dot{u}^a=0$$

地盤の変形が無い

$$\dot{\sigma}'_{ij}=0$$

力の釣合いは常に満足

定常流れの浸透問題

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

飽和地盤が満足すべき関係式

- 浸透問題（地盤の変形が無視できる場合）

  質量保存則：（連続の式） $\frac{\partial v_i^w}{\partial x_i}=0$　運動量保存則：（力の釣合い式） 常に満足

- 変形・浸透問題（地盤の変形と浸透の双方が生じる場合）

  質量保存則：（連続の式） $\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}+\frac{\partial v_i^w}{\partial x_i}=0$　運動量保存則：（力の釣合い式） $\frac{\partial \dot{\sigma}'_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial \dot{u}^w}{\partial x_i}=0$

- 変形問題（間隙水の流れが拘束を受けない場合）

  質量保存則：（連続の式） 常に満足　運動量保存則：（力の釣合い式） $\frac{\partial \dot{\sigma}'_{ij}}{\partial x_j}=0$

※変形問題は乾燥地盤で間隙空気の流れが拘束を受けない場合も同じ

3.3 地盤が満足すべき基本則 ＜まとめ＞

- 土の質量保存則
  - 土粒子部の連続の式
  - 間隙部の連続の式
- 飽和、不飽和、乾燥状態での連続の式を示した。
- 力の釣合い式
  - 速度型の力の釣合い式
- 飽和、乾燥状態での速度型力の釣合い式を示した。
- 飽和地盤が満足すべき関係式を示した。
- →これが境界値問題の微分方程式となる。