地盤数値解析学特論
Advanced Geotechnical Numerical Analysis

防災環境地盤工学研究室
村上　哲
Murakami, Satoshi

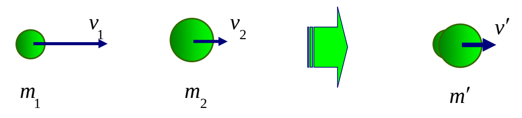
3.　地盤が満足すべき諸関係式

- 質点系の保存則
- 連続体における保存則と満足すべき関係式
  - 質量保存則から連続の式
  - 運動量保存則から運動方程式、力の釣合い式
  - 角運動量保存則から応力の対称性
- 地盤が満足すべき基本則
  - 連続の式
    - 土粒子部の連続の式
    - 間隙部の連続の式
  - 力の釣合い式
    - 応力分担の力の釣合い式
- ダルシー則
- 応力～ひずみ関係（構成関係）
  - 地盤材料の力学モデル
    - 弾性体
    - 弾塑性体

3.1　質点系の保存則

- 質量保存則
- 運動量保存則
- 角運動量保存則

■ 3.1　質点系の力学における保存則

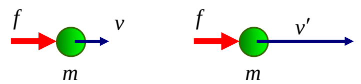


- 質量保存則

$$m_1 + m_2 = m'$$

- 運動量保存則

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m' v'$$

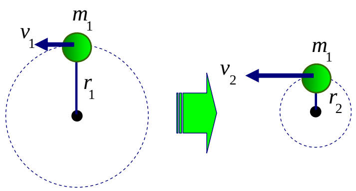


力を与え続けると運動量は増加する。

- 運動量の時間変化率は、質点に作用する外力に等しい。

$$\frac{D}{Dt}(mv) = f \quad \Rightarrow \quad ma = f$$

■ 質点系の力学における保存則



- □ 角運動量保存則

$$\boxed{m_1 v_1 r_1 = m_1 v_2 r_2}$$

- ■ 角運動量の時間変化率は、運動量の時間変化率は、質点に作用する外力に等しい。

$$\boxed{\frac{D}{Dt}(mvr) = fr}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

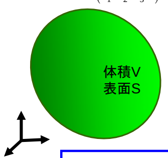
3.2 連続体の保存則と満足すべき関係式

- □ 質量保存則
  - ■ →連続の式
- □ 運動量保存則
  - ■ →運動方程式
  - ■ →力の釣合い式
- □ 角運動量保存則
  - ■ →モーメント力の釣合い式
  - ■ →応力の対称性

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■ 質量保存則:連続の式

密度 $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$



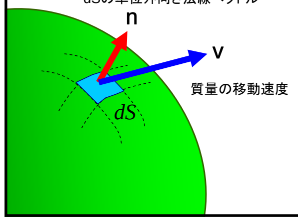
体積Vの質量 $m = \int_v \rho(x_1, x_2, x_3, t)\, dV$

単位時間当たりの質量の変化 $\dfrac{\partial m}{\partial t} = \int_v \dfrac{\partial \rho}{\partial t} dV$

“物体内では質量が増減しない”＝“湧き出しや消失が無い”

物体内の質量の変化の割合は物体内の表面を流入する質量に等しくなる。

dSの単位外向き法線ベクトル



微小面要素dSより流入する質量は、

$$-\rho v_i n_i dS \qquad -\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dS$$

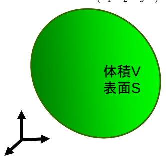
よって、物体内への質量の流入は、

$$\int_S -\rho v_i n_i dS = \int_V -\frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} dV$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■ 質量保存則:連続の式

密度 $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$



$$\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V -\frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} dV \qquad \int_v \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i}\right] dV = 0$$

したがって、 $\boxed{\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0}$ **連続の式①**

また、第2項を分離させて、

$\boxed{\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \dfrac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_i \dfrac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0}$ **連続の式②**

密度 ρ が場所にも時間にも依存しない $\rho = \rho_0 = const.$ 、すなわち、非圧縮性の場合は、

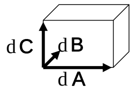
$\dfrac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0, \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ より $\boxed{\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0}$ $\boxed{div(\mathbf{v}) = 0}$

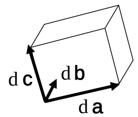
（非圧縮性物体の連続の式）

（参照：変位とひずみ）

■ 微小体積要素とJacobian（ヤコビアン）

□ 微小体積要素





$$\begin{aligned}dV_0 &= (d\mathbf{A}\times d\mathbf{B})\bullet d\mathbf{C}\\ &= \left(e_{ijk}A_iB_j\hat{\mathbf{e}}_k\right)\bullet\left(C_m\hat{\mathbf{e}}_m\right)\\ &= e_{ijk}A_iB_jC_m\left(\hat{\mathbf{e}}_k\bullet\hat{\mathbf{e}}_m\right)\\ &= e_{ijk}A_iB_jC_m\delta_{km}\\ &= e_{ijk}A_iB_jC_k\end{aligned}$$

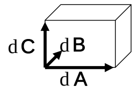
$$\boxed{dV = J\cdot dV_0}$$

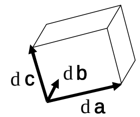
$$\boxed{J=\det(\mathbf{F})}\quad \text{Jacobian}$$

$$\begin{aligned}dV &= (d\mathbf{a}\times d\mathbf{b})\bullet d\mathbf{c}\\ &= \left[(\mathbf{F}\bullet d\mathbf{A})\times(\mathbf{F}\bullet d\mathbf{B})\right]\bullet(\mathbf{F}\bullet d\mathbf{C})\\ &= \left(e_{ijk}F_{ip}A_pF_{jq}B_q\hat{\mathbf{e}}_k\right)\bullet\left(F_{rm}C_m\hat{\mathbf{e}}_r\right)\\ &= e_{ijk}F_{ip}A_pF_{jq}B_qF_{rm}C_m\hat{\mathbf{e}}_k\bullet\hat{\mathbf{e}}_r\\ &= e_{ijk}F_{ip}A_pF_{jq}B_qF_{rm}C_m\delta_{kr}\\ &= e_{ijk}F_{ip}A_pF_{jq}B_qF_{km}C_m\\ &= e_{ijk}F_{ip}F_{jq}F_{km}A_pB_qC_m\\ &= e_{pqm}A_pB_qC_m\det(\mathbf{F})\end{aligned}$$

■ 質量保存則：連続の式

□ 連続の式のLagrangeの微分形





$$\int_{V_0}\rho_0 dV$$ 質量保存則より両者は等しい $$\int_V \rho dV = \int_{V_0}\rho J dV_0$$

$$\boxed{dV = J\cdot dV_0}$$

$$\int_{V_0}\left(\rho_0-\rho J\right)dV = 0$$

任意の微小体積で成り立つ $\boxed{\rho_0=\rho J}$

さらに、ρ_0は基準配置の状態、すなわち、$\rho_0 = const$ より $D\rho_0/Dt = 0$

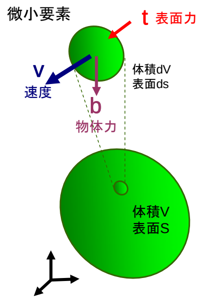
$$\boxed{\frac{D(\rho J)}{Dt}=0}$$

連続の式のLagrangeの微分形

※運動方程式・力の釣合い式の誘導に利用

■ 運動量保存則：運動方程式・力の釣合い式

物体内の任意の場所における微小要素の運動量の時間変化は、
その部分に作用する外力ベクトルの総和に等しい。（Newtonの第2法則）



微小要素の運動量の時間変化 $\dfrac{D}{Dt}(\rho\mathbf{v}dV)$

微小要素に作用する外力ベクトル $\mathbf{t}ds+\rho\mathbf{b}dV$

物体全体でも成り立つ

作用反作用の法則
（Newtonの第3法則）
を考慮して

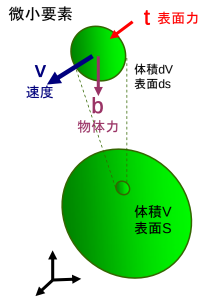
$$\boxed{\int_S \mathbf{t}dS+\int_V\rho\mathbf{b}dV=\frac{D}{Dt}\int_V\rho\mathbf{v}dV}$$

成分で書くと

$$\boxed{\int_S t_i dS+\int_V\rho b_i dV=\frac{D}{Dt}\int_V\rho v_i dV}$$

■ 運動量保存則：運動方程式・力の釣合い式

$$\boxed{\int_S t_i dS+\int_V\rho b_i dV=\frac{D}{Dt}\int_V\rho v_i dV}$$



左辺第１項、応力ベクトルと応力テンソルの関係を代入し、
Gaussの発散定理を適用すると、

$$\int_S t_i dS = \int_S \sigma_{ij}n_i dS = \int_V \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}dV$$

右辺は、Jacobianを用いて、運動前の体積V_0で表すと、
次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\int_V\rho v_i dV &= \frac{D}{Dt}\int_{V_0}\rho v_i J dV_0\\ &= \int_{V_0}\rho J\frac{Dv_i}{Dt}dV_0+\int_{V_0}v_i\frac{D(\rho J)}{Dt}dV_0\\ &= \int_V\rho\frac{Dv_i}{Dt}dV+\int_{V_0}v_i\frac{D(\rho_0)}{Dt}dV_0\\ &= \int_V\rho\dot{v}_i dV\end{aligned}$$

ここで、$\dot{v}_i=\dfrac{Dv_i}{Dt}$ とおいた。

■ 運動量保存則：運動方程式・力の釣合い式

$$\int_S t_i dS + \int_V \rho b_i dV = \frac{D}{Dt}\int_V \rho v_i dV$$

前出の2つの関係式を代入し、整理

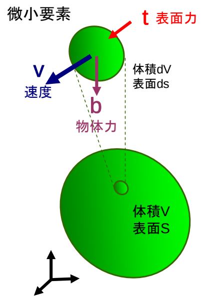
$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_i - dV \rho \dot{v}_i \right) dV = 0$$

これが常に成り立つ。

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i = 0$$ **運動方程式**

静的平衡状態（ $\dot{\mathbf{v}} = 0$ ）
準静的状態（ $\dot{\mathbf{v}}$ が十分に小さい）

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} + \rho b_i = 0$$ **力の釣合い式**



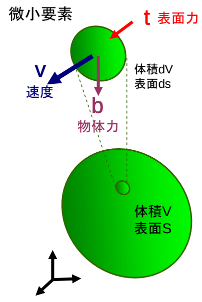
■ 運動量保存則：運動方程式・力の釣合い式

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} + \rho b_i = 0$$ **力の釣合い式**

速度型で表示すると、 $\frac{\partial \dot{\sigma}_{ji}}{\partial x_i} + \underline{\frac{D}{Dt}\left(\rho b_i\right)} = 0$

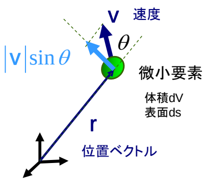
無視できるとき

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{ji}}{\partial x_i} = 0$$ **物体力の時間変化が無視できる場合の速度型力の釣合い式**

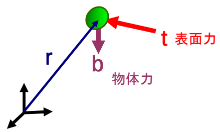


■ 角運動量保存則：応力の対称性

物体内の任意の場所における任意の位置（例えば原点）に関する角運動量の時間変化率は、物体内のその部分に働いている外力のモーメントに等しい。（角運動量保存則）



微小要素に着目



原点周りの角運動量モーメント

$$|\mathbf{v}|\sin\theta \times |\mathbf{r}| \times \rho dV$$

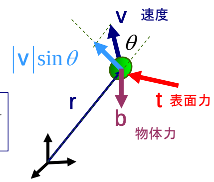
$$= (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) dV$$

外力によるモーメント

表面力 $(\mathbf{r} \times \mathbf{t}) ds$

物体力 $(\mathbf{r} \times \rho \mathbf{b}) dV$

■ 角運動量保存則：応力の対称性



角運動量保存則より、

$$\int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{t}) dS + \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{b}) dV = \frac{D}{Dt}\int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) dV$$

表面力によるモーメント　物体力によるモーメント　角運動量の時間変化率

成分表示で表すと、 $\int_S e_{ijk} x_j t_k dS + \int_V e_{ijk} x_j \rho b_k dV = \frac{D}{Dt}\int_V e_{ijk} x_j \rho v_k dV$

左辺第1項

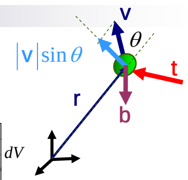
$t_k = \sigma_{lk} n_l$　Gaussの発散定理（Greenの定理）

$$\int_S e_{ijk} x_j t_k dS = \int_S e_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l dS = \int_V \frac{\partial\left(e_{ijk} x_j \sigma_{lk}\right)}{\partial x_l} dV = \int_V e_{ijk} \frac{\partial\left(x_j \sigma_{lk}\right)}{\partial x_l} dV$$

$$= \int_V e_{ijk} \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_l} \sigma_{lk} + x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \right) dV = \int_V e_{ijk} \left(\delta_{jl} \sigma_{lk} + x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \right) dV = \int_V e_{ijk} \left(\sigma_{jk} + x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \right) dV$$

したがって、左辺は、 $\int_V e_{ijk} \left[x_j \left(\frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} + \rho b_k \right) + \sigma_{jk} \right] dV$ となる。

■ 角運動量保存則：応力の対称性



右辺

$$\frac{D}{Dt}\int_V e_{ijk}x_j\rho v_k dV=\int_V e_{ijk}\frac{D}{Dt}\left(x_j\rho v_k\right)dV=\int_V e_{ijk}\left[\frac{Dx_j}{Dt}\rho v_k+x_j\frac{D\left(\rho v_k\right)}{Dt}\right]dV$$

$$=\int_V e_{ijk}\left[\rho v_j v_k+x_j\rho\frac{Dv_k}{Dt}\right]dV=\int_V\left[\rho e_{ijk}v_j v_k+e_{ijk}x_j\rho\frac{Dv_k}{Dt}\right]dV=\int_V e_{ijk}x_j\frac{Dv_k}{Dt}\rho dV$$

$\boxed{\frac{Dx_j}{Dt}=v_j}$ $\boxed{e_{ijk}v_j v_k=0 \quad \because \mathbf{v}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}}$

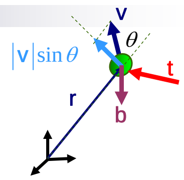
以上をまとめると、角運動量保存則の式は、

$$\int_V e_{ijk}\left[x_j\left(\frac{\partial\sigma_{lk}}{\partial x_l}+\rho b_k\right)+\sigma_{jk}-x_j\rho\frac{Dv_k}{Dt}\right]dV=0$$

$$\boxed{e_{ijk}\left[x_j\left(\frac{\partial\sigma_{lk}}{\partial x_l}+\rho b_k-\rho\frac{Dv_k}{Dt}\right)+\sigma_{jk}\right]=0}$$ （モーメント力の釣合い式）

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■ 角運動量保存則：応力の対称性



□ 角運動量保存則より導かれた式

$$e_{ijk}\left[x_j\underbrace{\left(\frac{\partial\sigma_{lk}}{\partial x_l}+\rho b_k-\rho\frac{Dv_k}{Dt}\right)}_{\text{運動方程式}}+\sigma_{jk}\right]=0$$

運動量保存則（運動方程式が成立）が満たされると、上式は、$\boxed{e_{ijk}\sigma_{jk}=0}$

$$e_{ijk}\sigma_{jk}=e_{i11}\sigma_{11}+e_{i12}\sigma_{12}+e_{i13}\sigma_{13}+e_{i21}\sigma_{21}+e_{i22}\sigma_{22}+e_{i23}\sigma_{23}+e_{i31}\sigma_{31}+e_{i32}\sigma_{32}+e_{i33}\sigma_{33}=0$$

i=1のとき　$e_{1jk}\sigma_{jk}=0+0+0+0+0+e_{123}\sigma_{23}+0+e_{132}\sigma_{32}+0=0$　$\boxed{\sigma_{23}=\sigma_{32}}$

i=2のとき　$e_{2jk}\sigma_{jk}=0+0+e_{213}\sigma_{13}+0+0+0+e_{231}\sigma_{31}+0+0=0$　$\boxed{\sigma_{31}=\sigma_{13}}$

i=3のとき　$e_{3jk}\sigma_{jk}=0+e_{312}\sigma_{12}+0+e_{321}\sigma_{21}+0+0+0+0+0=0$　$\boxed{\sigma_{12}=\sigma_{21}}$

$\boxed{e_{ijk}\sigma_{jk}=0}$ ⟺ $\boxed{\sigma_{ji}=\sigma_{ij}}$ **応力の対称性**

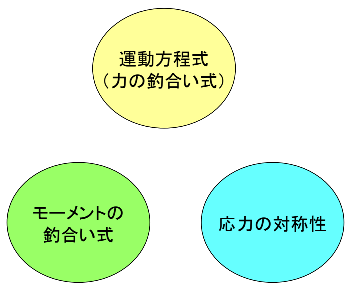
※角運動量保存則と応力の対称性が満たされるとき、運動量保存則は自動的に満足する。
※運動量保存則と応力の対称性が満たされるとき、角運動量保存則は自動的に満足する。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

3.2 連続体の保存則と満足すべき関係式

＜まとめ＞

- □ 質量保存則
  - ■ →連続の式
- □ 運動量保存則
  - ■ →運動方程式
  - ■ →力の釣合い式
- □ 角運動量保存則
  - ■ →応力の対称性



※2つが満足されると
自動的に1つを満足する。