

# 地盤数値解析学特論

## Advanced Geotechnical Numerical Analysis

防災環境地盤工学研究室  
村上 哲  
Murakami, Satoshi

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

## 2.地盤挙動を把握するための基礎

1. 変位とひずみ
2. 力と応力
3. 地盤の変形と応力

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

## 2.1 変位とひずみ

- 変形勾配テンソル
- ひずみテンソル
  - ひずみテンソル: 材料線素の長さの2乗の変化量の尺度
  - Green-LagrangeのひずみテンソルとAlmansiのひずみテンソル
  - 微小変形状態でのひずみテンソル
  - ひずみテンソルの物理的な意味
  - ひずみテンソルの変量
  - 体積ひずみとせん断ひずみ
  - ひずみ速度テンソル
- 変形勾配テンソルの分解
  - ひずみテンソルと回転テンソル
- 微小体積要素の変化率
  - Jacobian(ヤコビアン)
- 微小変形理論と有限変形理論でのひずみの違い
- 土の移動とひずみ

注意) 引張を正にとります。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ 変形勾配テンソル

- 物体Bが基準配置 $B_0$ (時刻 $t=0$ )から現在配置 $B_t$ (時刻 $t$ )へと変位したときを考える。基準配置において位置 $\mathbf{X}$ に存在していた物質点 $X$ が、現在時刻 $t$ において位置 $\mathbf{x}$ を占めるものとする。物質点 $X$ が $\mathbf{X}$ から $\mathbf{x}$ に移動する関係式は、次のようにあらわすことができる。

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t)$$

- 位置 $\mathbf{X}$ の近傍 $\mathbf{X}+d\mathbf{X}$ に存在する物質点 $X$ は、位置 $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$ に移動する。
- 微小材料線素 $d\mathbf{X}$ が $d\mathbf{x}$ に変わるという関係式として、

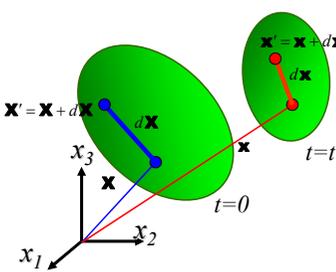
$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

で定義される2階のテンソル $\mathbf{F}$ を変形勾配テンソルと呼ぶ。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ 変形勾配テンソル

- 変形勾配テンソル  $\mathbf{F}$ :  $\mathbf{x}$ が $\mathbf{X}$ の関数  $x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t)$  より、関数 $\mathbf{x}$ を全微分すると次式を得る。

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \left( = \frac{\partial x_i}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_i}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_i}{\partial X_3} dX_3 \right) \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$


$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$

- 微小材料線素  $d\mathbf{x}$  が  $d\mathbf{X}$  に対応している関係式として、上の逆関係が存在する。

$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}$

$$(\mathbf{F}^{-1})_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

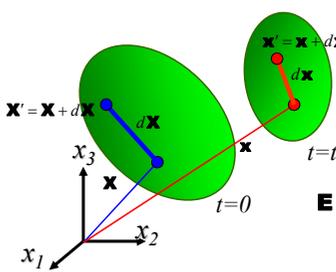
### ■ ひずみテンソル

- ひずみテンソル: 材料線素の長さの2乗の変化量の尺度
- Green-Lagrangeのひずみテンソル
  - 線素の長さの変化が変形前の線素  $d\mathbf{X}$  に参照される場合

$$\begin{aligned} (d\ell)^2 - (d\ell_0)^2 &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \\ &= (d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \cdot d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot (2\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{X} \end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right)$$

Green-Lagrangeのひずみテンソル



Advanced Geotechnical Numerical Analysis

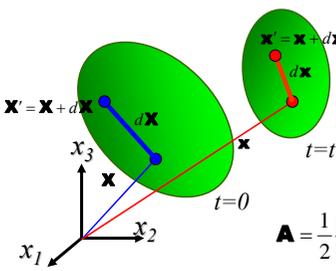
### ■ ひずみテンソル

- ひずみテンソル: 材料線素の長さの2乗の変化量の尺度
- Almansiのひずみテンソル
  - 線素の長さの変化が変形後  $d\mathbf{x}$  の線素に参照される場合

$$\begin{aligned} (d\ell)^2 - (d\ell_0)^2 &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}) \\ &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - (d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}) \\ &= d\mathbf{x} \cdot \mathbf{I} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{-1} \cdot d\mathbf{x} \\ &= d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{I} - (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{-1}) \cdot d\mathbf{x} \\ &= d\mathbf{x} \cdot (2\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{-1}) \quad A_{ij} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right)$$

Almansiのひずみテンソル



Advanced Geotechnical Numerical Analysis

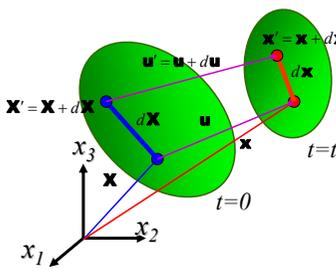
### ■ ひずみテンソル

- ひずみテンソル: 材料線素の長さの2乗の変化量の尺度
- Green-LagrangeのひずみテンソルとAlmansiのひずみテンソル
  - 変位ベクトル  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad x_i = X_i + u_i$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{u} \quad X_i = x_i - u_i$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$


Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ ひずみテンソル

- ひずみテンソル: 材料線素の長さの2乗の変化量の尺度
- Green-LagrangeのひずみテンソルとAlmansiのひずみテンソル

■ Green-Lagrangeのひずみテンソル

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \left( \delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \left( \delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) - \delta_{ij} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left( \delta_{ki} \delta_{kj} + \delta_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

■ Almansiのひずみテンソル

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \delta_{ij} - \left( \delta_{ki} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \left( \delta_{kj} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \delta_{ki} \delta_{kj} + \delta_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \delta_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ ひずみテンソル

- ひずみテンソル: 材料線素の長さの2乗の変化量の尺度
- Green-LagrangeのひずみテンソルとAlmansiのひずみテンソル

■ Green-Lagrangeのひずみテンソル

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

■ Almansiのひずみテンソル

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

変位勾配が  $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  とみなせる = 基準配置と現在配置でも同じ

変形が微小であるとき:

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \gg \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \gg \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

$$E_{ij} \approx A_{ij} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ij}$$

ひずみテンソル (微小ひずみテンソル)

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ ひずみテンソル

ひずみテンソルの物理的な意味

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$i=1, j=1$  のとき

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

線素①のx方向の伸び率

$$\left( dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \right) - dx_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1$$

$i=2, j=2$  のとき

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

線素②のy方向の伸び率

$$\left( dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 \right) - dx_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2$$

$i=1, j=2$  のとき

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

線素①の回転角  $\theta_1$

$$\theta_1 \approx \tan \theta_1 = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1} \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

線素②の回転角  $\theta_2$

$$\theta_2 \approx \tan \theta_2 = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2}{dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2} \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ ひずみテンソル

ひずみテンソルの物理的な意味

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$i=j$  のとき、垂直ひずみ

$i \neq j$  のとき、

$$2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$\gamma_{ij}$ : 工学せん断ひずみ

ひずみテンソルの対称性

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ ひずみテンソルの不変量

- 体積ひずみ  $\varepsilon_v$ 

$$\varepsilon_v = tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad \varepsilon_v = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

ひずみテンソルの1次の不変量
- せん断ひずみ  $\gamma$ 
  - 偏差ひずみテンソル
 
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_v \delta_{ij}$$
  - 偏差ひずみテンソルの2次の不変量
 
$$J_2^e = \frac{1}{2}e_{ij}e_{ij} \quad \gamma = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}} = \sqrt{\frac{4}{3}J_2^e}$$

三軸圧縮試験で用いられるせん断ひずみ

$$\gamma = \frac{2}{3}(\varepsilon_a - \varepsilon_r) = \varepsilon_a - \frac{1}{3}\varepsilon_v$$

$$J_2^e = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2\varepsilon_{12}^2 + 2\varepsilon_{13}^2 + 2\varepsilon_{23}^2)$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}^2 + 2\varepsilon_{12}^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\varepsilon_{11} - \frac{1}{3}\varepsilon_v\right)^2 + 2\left(\varepsilon_{12} - \frac{1}{3}\varepsilon_v\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\varepsilon_{11} - \frac{2}{3}\varepsilon_v + \frac{1}{3}\varepsilon_v\right)^2 + 2\left(\varepsilon_{12} - \frac{2}{3}\varepsilon_v + \frac{1}{3}\varepsilon_v\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12}\right) - \frac{2}{3}\varepsilon_v\left(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12}\right) + \frac{1}{3}\varepsilon_v^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12}\right) - \frac{2}{3}\varepsilon_v\left(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12}\right) + \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12}\right) - \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12}\right) - \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{11}^2 + 4\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} + 4\varepsilon_{12}^2\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}\varepsilon_{11} - \frac{4}{3}\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} + \frac{2}{3}\varepsilon_{12}^2\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\varepsilon_{11}^2 - 2\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} + \varepsilon_{12}^2\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(\varepsilon_v - \varepsilon_r\right)^2$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ 体積ひずみとせん断ひずみ

- (土)要素の変形

変形する前 → 変形した後

変形 = 大きさの変化 + 形の変化

体積ひずみ  $\varepsilon_v = tr(\boldsymbol{\varepsilon})$   
ひずみテンソルの1次の不変量

せん断ひずみ  $\gamma = \sqrt{\frac{3}{2}e_{ij}e_{ij}}$   
 $\gamma = \sqrt{3J_2^e}$   
偏差ひずみテンソルの2次の不変量

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ ひずみとひずみ速度

- ひずみ速度テンソル  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad v_i = \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad \text{変位速度}$$
- 体積ひずみ速度
 
$$\dot{\varepsilon}_v = tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad \dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33}$$

ひずみ速度テンソルの1次の不変量
- 偏差ひずみ速度テンソル
 
$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{3}tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})\mathbf{I} \quad \dot{e}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_v \delta_{ij}$$
- せん断ひずみ速度
 
$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{3}{2}\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij}} = \sqrt{3J_2^{\dot{e}}} \quad J_2^{\dot{e}} = \frac{1}{2}\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij} \quad \text{偏差ひずみ速度テンソルの2次の不変量}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ 変形勾配テンソルの分解

- 変位勾配テンソル  $F_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$
- 変位勾配テンソルの分解
 
$$F_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$
  - ひずみテンソル
 
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  対称テンソル
  - 回転テンソル
 
$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$  反対称テンソル

### ■ 変形速度勾配テンソルの分解

- 変位速度勾配テンソル  $\dot{F}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$
- 変位速度勾配テンソルの分解
 
$$\dot{F}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\omega}_{ij}$$
  - ひずみ速度テンソル(ストレッチングテンソル)
 
$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ji}$  対称テンソル
  - 回転速度テンソル(スピニングテンソル)
 
$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$\dot{\omega}_{ij} = -\dot{\omega}_{ji}$  反対称テンソル

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■ 微小体積要素とJacobian (ヤコビアン)

□ 微小体積要素

$dV_0 = (d\mathbf{A} \times d\mathbf{B}) \cdot d\mathbf{C}$

$$= (e_{ijk} A_i B_j \hat{\mathbf{e}}_k) \cdot (C_m \hat{\mathbf{e}}_m)$$

$$= e_{ijk} A_i B_j C_m (\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_m)$$

$$= e_{ijk} A_i B_j C_m \delta_{km}$$

$$= e_{ijk} A_i B_j C_k$$

$dV = J \cdot dV_0$

$J = \det(\mathbf{F})$  Jacobian

$dV = (d\mathbf{a} \times d\mathbf{b}) \cdot d\mathbf{c}$

$$= [(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}) \times (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{B})] \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{C})$$

$$= (e_{ijk} F_{ip} A_p F_{jq} B_q \hat{\mathbf{e}}_k) \cdot (F_{rm} C_m \hat{\mathbf{e}}_r)$$

$$= e_{ijk} F_{ip} A_p F_{jq} B_q F_{rm} C_m \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$= e_{ijk} F_{ip} A_p F_{jq} B_q F_{rm} C_m \delta_{kr}$$

$$= e_{ijk} F_{ip} A_p F_{jq} B_q F_{km} C_m$$

$$= e_{ijk} F_{ip} F_{jq} F_{km} A_p B_q C_m$$

$$= e_{pqm} A_p B_q C_m \det(\mathbf{F})$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■ 微小変形理論と有限変形理論でのひずみの違い

■ 線素の初期の長さを  $\ell$  変形後の長さを  $\ell'$  とする。

□ Cauchyひずみ (工学ひずみ): 微小変形理論

ひずみの重ね合わせができない

$$\varepsilon^C = \frac{\ell'}{\ell} - 1$$

□ Green-Lagrangeひずみ

$$\varepsilon^G = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\ell'}{\ell} \right)^2 - 1 \right\} = \left( \frac{\ell'}{\ell} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\ell'}{\ell} - 1 \right)^2$$

□ Almansiひずみ

$$\varepsilon^A = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{\ell'}{\ell} \right)^2 \right\} = \left( \frac{\ell'}{\ell} - 1 \right) - \frac{3}{2} \left( \frac{\ell'}{\ell} - 1 \right)^2$$

□ Henckyひずみ (対数ひずみ): 有限変形理論

ひずみの重ね合わせができる

$$\varepsilon^H = \ln \left( \frac{\ell'}{\ell} \right)$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■ 土の移動と変位・ひずみ

□ 土を構成する物質

- 土粒子と間隙流体 (水と空気)

□ 土粒子部 (土骨格) の変位と変形

- 土粒子は変形しないと仮定
- **土粒子の配置の変化が土の変形となって現れる**
- 地盤内の変位は土骨格部の変位と考える

$\mathbf{u} = \mathbf{u}^s \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^s$

ひずみテンソル  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^s}{\partial x_i} \right)$

ひずみ速度テンソル  $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right)$

※添え字sは土骨格部という意味

変形

変形する前

変形した後

II

大きさの変化

+

形の変化

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■ 土の移動と変位・ひずみ

□ 土を構成する物質

- 土粒子と間隙流体 (水と空気)

□ 間隙流体の移動

- 間隙水と間隙空気 (真の) 移動速度を  $\mathbf{v}^w$  と  $\mathbf{v}^a$  とする。
- 地盤内のある断面を横切る (見かけの) 移動速度として、次の速度で表わす。

$$\mathbf{v}^w = \theta^w \mathbf{v}^s \quad \mathbf{v}^a = \theta^a \mathbf{v}^s \quad \text{※添え字wとaは間隙水と間隙空気という意味}$$

□  $\theta^w$  と  $\theta^a$  はそれぞれ土要素体積に対する間隙水と間隙空気の体積の比

$$\theta^w = n S_r \quad \theta^a = (1-n) S_r$$

$n$ : 間隙率  $S_r$ : 飽和度 (1のとき飽和、0のとき乾燥)

□ このように定義される移動速度を地盤工学では間隙水あるいは間隙空気の流速と呼ぶ。

□ メリット: 地盤内の任意断面を横切る流量の計算が容易になる、等

- 間隙流体の非圧縮性、また、圧縮されない状態での地盤の挙動では、間隙流体の変形は考えなくてよい ⇒ 間隙流体のひずみは定義しない。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

## 2.1 変位とひずみ 〈まとめ〉

- 変形勾配テンソル
- ひずみテンソル
  - ひずみテンソル 材料線素の長さの2乗の変化量の尺度
    - Green-LagrangeのひずみテンソルとAlmansiのひずみテンソルが、微小変形状態では一致する。そのテンソルをひずみテンソルと呼ぶ
  - ひずみテンソルの物理的な意味
    - 直ひずみとせん断ひずみ
    - ひずみテンソルの不変量
      - ひずみテンソルの1次の不変量: 体積ひずみ
      - 偏歪ひずみテンソルの2次の不変量: せん断ひずみ
  - ひずみ速度テンソル
    - ひずみテンソルの時間微分で与えられる
- 変形勾配テンソルの分解
  - ひずみテンソルと回転テンソル
- 微小体積要素の変化率
  - Jacobian (ヤコビアン)
- 微小変形理論と有限変形理論でのひずみの違い
- 土の移動とひずみ
  - 土を構成する物質
  - 土粒子部の移動とひずみ
  - 間隙流体の移動

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

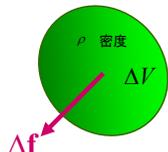
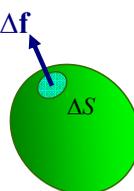
## 2.2 力と応力

- 力
  - 物体力と表面力
- 応力ベクトル
- 応力テンソル
  - 定義
  - 応力テンソルの対称性
  - 応力テンソルの不変量と主値
  - 偏差応力テンソル
  - 偏差応力テンソルの不変量と主値

注意) 引張を正にとります。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

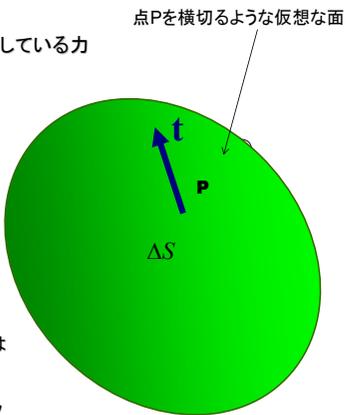
## ■ 力

- 外力
  - 物体力
 
$$\mathbf{b} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\rho \Delta V}$$

    - 例) 重力、(慣性力)
  - 表面力
 
$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S}$$

    - 例) 載荷重、水圧
- 内力: 応力

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

## ■ 応力ベクトル

- 物体内部の任意の点に作用している力
  - 点を横切るような任意の面(曲面でもよい)を仮定
  - 仮定した面上の微小面に作用する力と定義

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}$$


点を横切るような任意の面(曲面でもよい)を仮定  
仮定した面上の微小面に作用する力と定義

点Pで法線ベクトルが一致する仮定面であれば応力ベクトルは等しくなる。  
点Pで法線ベクトルが一致しない仮定面では、異なる応力ベクトルとなる。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ 応力

□ 応力ベクトル

$\Delta OBC$ 面の面積 $S^{\textcircled{1}}$   $dS^{\textcircled{1}} = n_1 dS$   
 $\Delta OCA$ 面の面積 $S^{\textcircled{2}}$   $dS^{\textcircled{2}} = n_2 dS$   
 $\Delta OAB$ 面の面積 $S^{\textcircled{3}}$   $dS^{\textcircled{3}} = n_3 dS$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ 応力

□ 応力テンソル

$x_1$  軸方向の力の釣り合い

$$t_1 dS = \sigma_{11} dS^{\textcircled{1}} + \sigma_{21} dS^{\textcircled{2}} + \sigma_{31} dS^{\textcircled{3}}$$

$$= \sigma_{11} n_1 dS + \sigma_{21} n_2 dS + \sigma_{31} n_3 dS$$

$$t_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3$$

同様に、

$$t_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3$$

$$t_3 = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \quad \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

**応力テンソル**

$\Delta OBC$ 面の面積 $S^{\textcircled{1}}$   $dS^{\textcircled{1}} = n_1 dS$   
 $\Delta OCA$ 面の面積 $S^{\textcircled{2}}$   $dS^{\textcircled{2}} = n_2 dS$   
 $\Delta OAB$ 面の面積 $S^{\textcircled{3}}$   $dS^{\textcircled{3}} = n_3 dS$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ 応力

□ 応力テンソル

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

応力の成分は9個

$\sigma_{ij}$   $i=j$ のとき、垂直応力  
 $i \neq j$ のとき、せん断応力

↑ 作用方向  
↑ 作用する面

※地盤工学では圧縮を正にとる

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ 応力の対称性(静的状態)

□ モーメントの釣り合いより

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}$$

□ 同様に、

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

対称性を考慮すると応力の独立な成分は6個

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ 応力テンソルの不変量

□ 応力テンソル

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

以降は、対称性を考慮して上記のように書くことにする。

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$\sigma_1$  最大主応力  
 $\sigma_2$  中間主応力  
 $\sigma_3$  最小主応力

平均応力 (静水圧)  $p = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$

主応力状態では  $p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$

1次の不変量  $I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{kk}$

2次の不変量  $I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji})$

3次の不変量  $I_3 = \det|\boldsymbol{\sigma}|$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ 応力テンソルの不変量

□ 主応力空間における平均応力

平均応力 (静水圧)  $p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$

$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3)^T$

$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^p = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_p) \hat{\mathbf{e}}_p$

$\hat{\mathbf{e}}_p = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ \frac{1}{\sqrt{3}} \ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$

$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^q = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^p$

主応力空間における応力点  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  から、静水圧軸におろしたベクトル  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^p$  の3つの成分となる。

等方的な応力成分を除いた分 = 偏った応力成分 (偏差応力成分)

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ 偏差応力テンソル

□ 応力テンソルの偏った成分

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p' & 0 & 0 \\ 0 & p' & 0 \\ 0 & 0 & p' \end{bmatrix}$$

偏差応力テンソル      応力テンソル      応力テンソルの等方成分

$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I}$

$s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$

$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3)^T$

$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^q = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^p$

静水圧軸  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ 偏差応力テンソル

□ 偏差応力テンソルの不変量

$s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$

■ 一次の不変量  $J_1 = \text{tr}(\mathbf{s}) = s_{kk} = \sigma_{kk} - p\delta_{kk} = p - p = 0$  よく使う関係式  $s_{ii} = s_{ij}\delta_{ij} = 0$

■ 二次の不変量  $J_2 = -\frac{1}{2}(s_{ii}s_{jj} - s_{ij}s_{ji}) = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$

■ 三次の不変量  $J_3 = \det|\mathbf{s}|$

□ 偏差応力テンソルの主値  $(s_1 \ s_2 \ s_3) = (\sigma_1 - p \ \sigma_2 - p \ \sigma_3 - p)$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ 偏差応力テンソル

- 偏差応力テンソルの不変量
  - 一次の不変量
 
$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$$
  - 二次の不変量
 
$$J_2 = -\frac{1}{2}(s_{ii}s_{jj} - s_{ij}s_{ji}) = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$$
  - 三次の不変量
 
$$J_3 = \det|\mathbf{s}|$$
- 偏差応力テンソルの主値
 
$$(s_1 \ s_2 \ s_3) = (\sigma_1 - p \ \sigma_2 - p \ \sigma_3 - p)$$

よく使う関係式  $s_{ii} = s_{ij}\delta_{ij} = 0$

$J_1 = \text{tr}(\mathbf{s}) = s_{kk} = \sigma_{kk} - p\delta_{kk} = p - p = 0$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### ■ 応力テンソルの不変量(まとめ)

<h4>■ 応力テンソル</h4> <p><math>\sigma_{ij}</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>□ 第一不変量           <math display="block">I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{kk}</math> </li> <li>□ 第二不変量           <math display="block">I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji})</math> </li> <li>□ 第三不変量           <math display="block">I_3 = \det \boldsymbol{\sigma} </math> </li> </ul>	<h4>■ 偏差応力テンソル</h4> <p><math>s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>□ 第一不変量           <math display="block">J_1 = 0</math> </li> <li>□ 第二不変量           <math display="block">J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}</math> </li> <li>□ 第三不変量           <math display="block">J_3 = \det \mathbf{s} </math> </li> </ul>
---	--

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

## 2.2 力と応力

### <まとめ>

- 力
  - 物体力と表面力
- 応力ベクトルから応力テンソルを規定
- 応力テンソル
  - 定義
  - 応力テンソルの対称性
  - 応力テンソルの不変量と主値
  - 偏差応力テンソル
  - 偏差応力テンソルの不変量と主値

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

## 2.3 地盤の変形と応力

- 地盤内応力と応力分担
  - 全応力、有効応力、間隙水圧
- 間隙水圧
- 有効応力テンソル
  - 有効応力の原理(応力分担式)
  - 有効応力テンソルの1次の不変量
  - 偏差応力テンソル
  - 偏差応力テンソルの2次の不変量
- 全応力と有効応力の速度表示
  - 諸関係式
  - 排水条件と応力速度の分担式

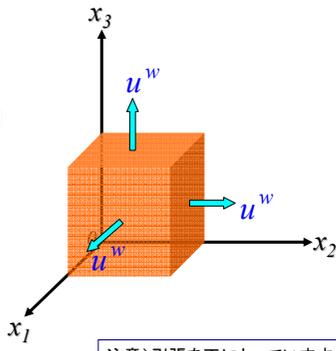
(注意) 引張を正にとります。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

- 地盤内応力と応力分担
  - 土要素の変形は土骨格の変形
  - 土要素に作用する応力: 全応力
    - 土骨格の変形に寄与する応力: 有効応力
    - 土骨格の変形には関係しない応力: 中立応力
  - 飽和した土の場合: 中立応力 = 間隙水圧
 
$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{u}^w$$
  - 乾燥した土の場合: 中立応力 = 間隙空気圧
    - ただし、大気と連続な場合は、ゼロ
$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}'$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

- 間隙水圧(間隙水に作用する応力)
  - せん断応力はなし
  - 等方的に作用
$$\mathbf{u}^w = \begin{bmatrix} u^w & 0 & 0 \\ 0 & u^w & 0 \\ 0 & 0 & u^w \end{bmatrix} = u^w \cdot \mathbf{I}$$
  - 成分表示  $u^w \delta_{ij}$



注意) 引張を正にとっています。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

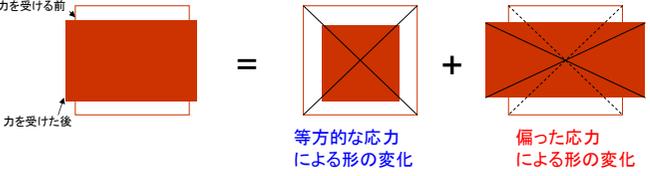
- 有効応力(土骨格に作用する応力)
  - 有効応力の原理(応力分担式): 飽和土を対象
$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - u^w \cdot \mathbf{I}$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u^w \delta_{ij}$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u^w & 0 & 0 \\ 0 & u^w & 0 \\ 0 & 0 & u^w \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} - u^w & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - u^w & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - u^w \end{bmatrix}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

- 土要素の形を変える応力の成分
  - 変形 = 大きさの変化 + 形の変化

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p' & 0 & 0 \\ 0 & p' & 0 \\ 0 & 0 & p' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s'_{11} & s'_{12} & s'_{13} \\ s'_{21} & s'_{22} & s'_{23} \\ s'_{31} & s'_{32} & s'_{33} \end{bmatrix}$$

等方成分      偏差成分

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■ 土要素の形を変える応力の成分

□ 平均有効応力

$$p' = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}') = \frac{1}{3} \sigma'_{kk}$$

有効応力テンソルの1次の不変量  $I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}') = 3p'$

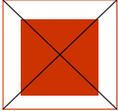
■ 平均(全)応力  $p = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$

有効応力の原理  $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + u^w \cdot \mathbf{1}$  より、

$$p = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}' + u^w \mathbf{1}) = \frac{1}{3} \{ \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}') + u^w \text{tr}(\mathbf{1}) \} = \frac{1}{3} \{ \sigma'_{kk} + 3u^w \} = p' + u^w$$

$$p' = p - u^w$$

等方的な応力による形の変化



等方成分

$$\begin{bmatrix} p' & 0 & 0 \\ 0 & p' & 0 \\ 0 & 0 & p' \end{bmatrix}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■ 土要素の形を変える応力の成分

□ 偏差応力テンソル

$$\begin{bmatrix} s'_{11} & s'_{12} & s'_{13} \\ s'_{21} & s'_{22} & s'_{23} \\ s'_{31} & s'_{32} & s'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p' & 0 & 0 \\ 0 & p' & 0 \\ 0 & 0 & p' \end{bmatrix}$$

※偏差応力テンソルの1次の不変量

$$J_1 = \text{tr}(\mathbf{s}') = s'_{kk}$$

$$= s'_{11} + s'_{22} + s'_{33}$$

$$= (\sigma'_{11} - p') + (\sigma'_{22} - p') + (\sigma'_{33} - p')$$

$$= \sigma'_{kk} - 3p' = 0$$

$$s'_{kk} = 0$$

偏った応力による形の変化



■ 平均(全)応力  $p = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$

有効応力の原理  $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + u^w \cdot \mathbf{1}$  より、

$$p = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}' + u^w \mathbf{1}) = \frac{1}{3} \{ \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}') + u^w \text{tr}(\mathbf{1}) \} = \frac{1}{3} \{ \sigma'_{kk} + 3u^w \} = p' + u^w$$

$$p' = p - u^w$$

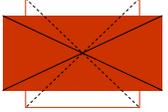
Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■ 土要素の形を変える応力の成分

□ 偏差応力テンソル

$$\begin{bmatrix} s'_{11} & s'_{12} & s'_{13} \\ s'_{21} & s'_{22} & s'_{23} \\ s'_{31} & s'_{32} & s'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p' & 0 & 0 \\ 0 & p' & 0 \\ 0 & 0 & p' \end{bmatrix}$$

偏った応力による形の変化



$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} - u^w & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - u^w & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - u^w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p - u^w & 0 & 0 \\ 0 & p - u^w & 0 \\ 0 & 0 & p - u^w \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}$$

$$s'_{ij} = s_{ij}$$

※有効応力でも全応力でも偏差応力テンソルは同じ

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■ 土要素の形を変える応力の成分

□ 偏差応力テンソルの2次の不変量

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$$

□ 偏差応力

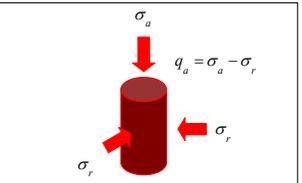
■ 地盤力学でよく用いられる

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{3J_2}$$

3軸圧縮試験条件では、偏差応力qは、軸差応力 $q_a$ となる。

$$q = q_a$$

偏った応力による形の変化



Advanced Geotechnical Numerical Analysis

- (まとめ) 地盤力学でよく用いられる応力変数
  - 平均有効応力
 
$$p' = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}') = \frac{1}{3} I_1$$
 土を強くする。
  - 偏差応力
 
$$q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{3J_2}$$
 土を壊そうとする。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

- 平均有効応力と偏差応力で土の応力状態を把握
  - 例) 有効応力経路

引張を正としているのでマイナスがついている

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

### 土要素の形を変える応力の成分

- 変形 = 大きさの変化 + 形の変化

$\sigma'_{ij}$  = 等方的な応力  $p'$  (平均有効応力) + 偏った応力  $q$  (偏差応力)

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

- 変形 = 大きさの変化 + 形の変化

体積ひずみ  $\epsilon_v$       せん断ひずみ  $\gamma$

ダイレイタンスー  
 せん断変形に伴う体積変化  
 体積膨張を正のダイレイタンスー  
 体積収縮を負のダイレイタンスー  
 と呼ぶ。

平均有効応力  $p'$       偏差応力  $q$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

- 全応力と有効応力の速度表示
  - (全)応力速度テンソル  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\sigma}_{ij}$
  - 有効応力速度テンソル  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \dot{\sigma}'_{ij}$
  - 速度型の応力分担式  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \dot{u}_w \mathbf{I} \quad \dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} + \dot{u}_w \delta_{ij}$
  - 平均応力速度、平均有効応力速度  $\dot{p} = \frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \quad \dot{p}' = \frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}')$
  - 偏差応力速度テンソル  $\dot{\mathbf{s}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{p} \mathbf{I} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}' - \dot{p}' \mathbf{I} \quad \dot{s}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{p} \delta_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} - \dot{p}' \delta_{ij}$
  - 偏差応力速度  $\dot{q} = \frac{Dq}{Dt} = \frac{D}{Dt} \sqrt{3J_2}$ 

$$= \frac{D}{Dt} (3J_2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} 3J_2 (3J_2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2q} J_2$$

$$= \frac{3}{2q} \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \right) = \frac{3s_{ij} \dot{s}_{ij}}{2q}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

- 全応力と有効応力の速度表示
  - 土の排水条件と応力速度の分担式
 
$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \dot{u}_w \mathbf{I}$$
    - 間隙水圧の増加速度がゼロの場合
 
$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}'$$
      - 飽和状態にある土の間隙水圧が増加しないように外力が作用したとき(間隙水の出入りが自由): **完全排水状態**
      - 乾燥状態にある土の間隙空気圧が増加しないように外力が作用したとき
    - 間隙水圧の増加速度がゼロでない場合
      - 飽和状態にある土の間隙水が移動できないとき: **非排水状態**
      - 飽和状態にある土の間隙水の移動が瞬時に行われなとき: **部分排水状態**

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

## 2.3 地盤の変形と応力

### <まとめ>

- 地盤内応力と応力分担
  - 全応力、有効応力、間隙水圧
- 間隙水圧
- 有効応力テンソル
  - 有効応力の原理(応力分担式)
  - 有効応力テンソルの1次の不変量: 平均有効応力
  - 偏差応力テンソル
  - 偏差応力テンソルの2次の不変量: 偏差応力
- 全応力と有効応力の速度表示
  - 諸関係式
  - 排水条件と応力速度の分担式