地盤数値解析学特論
Advanced Geotechnical Numerical Analysis

防災環境地盤工学研究室
村上　哲
Murakami, Satoshi

1.地盤挙動を解析するための基礎

1. スカラー、ベクトル、テンソル、総和規約
2. 偏微分、面積積分、体積積分
3. ガウスの発散定理
4. 微分方程式の境界値問題と弱形式
5. Gaussの数値積分
6. 連立方程式とその解法

1.1　スカラー・ベクトル・テンソル・総和規約

- スカラー
- ベクトル
- 総和規約
- テンソル

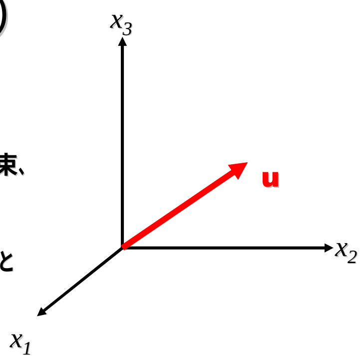
スカラー(Scalar)

- スカラー
  - 長さ、高さ、体積、質量、温度、密度、濃度、圧力、速さ、降水量、積雪量等
  - これらの値は、分布図を空間上に描くことが可能
    - 例えば、温度分布(T(x,y,z,t))、地形の等高線、空気中のダイオキシンの濃度分布、天気図の圧力分布など。
  - 以上のことから、Scalarは、magnitude onlyということ。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

ベクトル(Vector)

- ベクトル
  - 速度、加速度、座標、変位、モーメント、力、電流、熱流束、電場、磁場
  - つまり、Vectorは、Scalarと違い、magnitude以外にdirection(方向)を持つ。



Advanced Geotechnical Numerical Analysis

ベクトル(Vector)

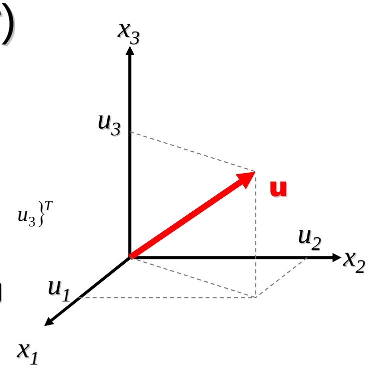
- ベクトルの成分表示
  - 座標系を定義してはじめて成分表示できる。

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3\}^T$$

  - ベクトルの大きさと方向

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \qquad |\hat{\mathbf{u}}| = 1 \quad \text{(unit vector)}$$



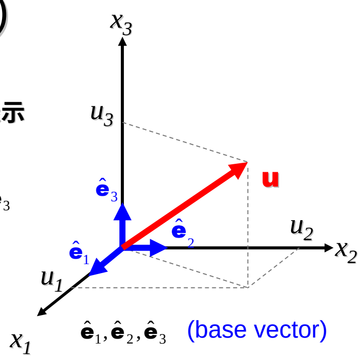
Advanced Geotechnical Numerical Analysis

ベクトル(Vector)

- ベクトルの成分表示
  - Base vectorを用いた表示

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = u_1\hat{\mathbf{e}}_1 + u_2\hat{\mathbf{e}}_2 + u_3\hat{\mathbf{e}}_3$$

$$= \sum_{i=1}^{3} u_i \hat{\mathbf{e}}_i$$



$\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ (base vector)

$$|\hat{\mathbf{e}}_1| = |\hat{\mathbf{e}}_2| = |\hat{\mathbf{e}}_3| = 1$$

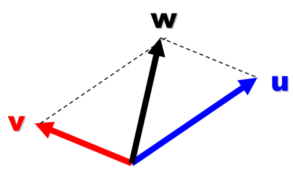
Advanced Geotechnical Numerical Analysis

ベクトル(vector)の演算

- ベクトルの加法

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

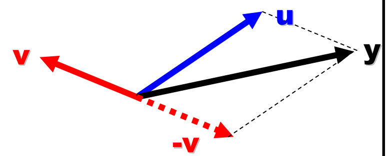
$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{Bmatrix}$$



- ベクトルの減法

$$\mathbf{y} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$$

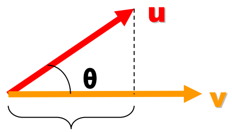
$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{Bmatrix}$$



ベクトル(vector)の演算

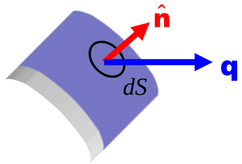
- 内積(dot product)
  - 解析学的定義式

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$$



$$\mathbf{u}\bullet\hat{\mathbf{v}}=|\mathbf{u}|\cos\theta$$

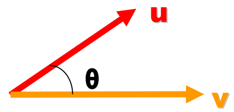
  - 幾何学的な意味
    - **v**がunit vectorの場合、**u**と**v**の内積は、uをベクトルv方向へ投影した大きさを表す。
  - 微小面積dS (外向き法線ベクトル**n**を) を横切って、流れ出る流量 $q_n=\mathbf{q}\bullet\hat{\mathbf{n}}$



Advanced Geotechnical Numerical Analysis

ベクトル(vector)の演算

- 内積(dot product)
  - 成分を用いた演算



$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}\bullet\begin{Bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{Bmatrix}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=\sum_{i=1}^{3}u_iv_i$$

※成分の値は座標系で異なってくるが、内積の演算結果は座標系に依らない。

  - 演算の順番は入れ替えても結果は同じ

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=\mathbf{v}\bullet\mathbf{u}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

ベクトル(vector)の演算

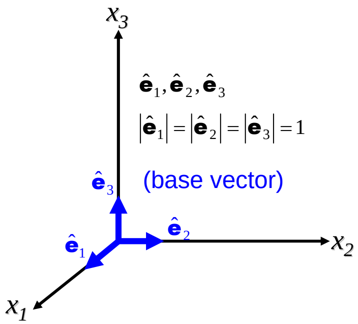
- 基本ベクトル(base vector)間の内積

$$\hat{\mathbf{e}}_i\bullet\hat{\mathbf{e}}_j=\delta_{ij}$$

Kroneker's delta

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{\mathbf{e}}_1\bullet\hat{\mathbf{e}}_1=\hat{\mathbf{e}}_2\bullet\hat{\mathbf{e}}_2=\hat{\mathbf{e}}_3\bullet\hat{\mathbf{e}}_3=1\\&\hat{\mathbf{e}}_1\bullet\hat{\mathbf{e}}_2=\hat{\mathbf{e}}_2\bullet\hat{\mathbf{e}}_1=0\\&\hat{\mathbf{e}}_2\bullet\hat{\mathbf{e}}_3=\hat{\mathbf{e}}_3\bullet\hat{\mathbf{e}}_2=0\\&\hat{\mathbf{e}}_3\bullet\hat{\mathbf{e}}_1=\hat{\mathbf{e}}_1\bullet\hat{\mathbf{e}}_3=0\end{aligned}}$$



$$\hat{\mathbf{e}}_1,\hat{\mathbf{e}}_2,\hat{\mathbf{e}}_3$$

$$|\hat{\mathbf{e}}_1|=|\hat{\mathbf{e}}_2|=|\hat{\mathbf{e}}_3|=1$$

(base vector)

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

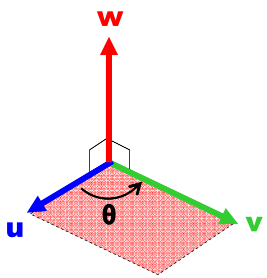
ベクトル(vector)の演算

- 外積(cross product)

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{w}$$

  - 向き：ベクトル**u**と**v**を含む平面に直交する
  - 大きさ：ベクトル**u**と**v**を辺に持つ平行四辺形の面積に等しい

$$|\mathbf{w}|=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta$$

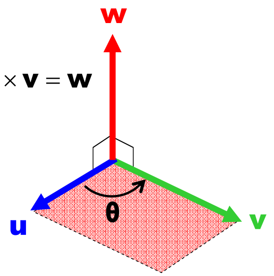


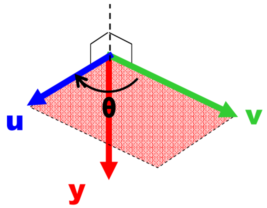
Advanced Geotechnical Numerical Analysis

ベクトル(vector)の演算

- 外積(cross product)
  - ベクトルの向きに注意

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$

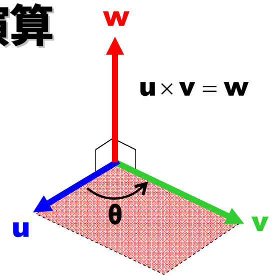




$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \mathbf{y} = -\mathbf{w}$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

ベクトル(vector)の演算



- 外積(cross product)
  - 成分を用いた演算

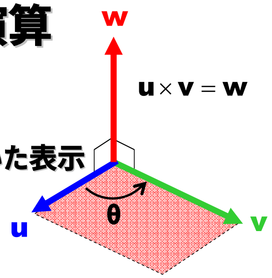
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{Bmatrix}$$

$$= (u_2 v_3 - u_2 v_3)\hat{\mathbf{e}}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\hat{\mathbf{e}}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\hat{\mathbf{e}}_3$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \end{vmatrix}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

ベクトル(vector)の演算



- 外積(cross product)
  - permutation symbolを用いた表示

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} e_{ijk} u_i v_j \hat{\mathbf{e}}_k$$

permutation symbol (交代記号)

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) = (1,2,3) = (2,3,1) = (3,1,2) \\ -1 & (i,j,k) = (3,2,1) = (2,1,3) = (1,3,2) \\ 0 & i = j or j = k or k = i \end{cases}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

アインシュタインの総和規約

- ベクトル演算で出てくる総和の記号Σ

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} u_i u_i}$$

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$$

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} e_{ijk} u_i v_j \hat{\mathbf{e}}_k$$

$\sum_{i=1}^{3}$ 総和の記号がある。総和の個数は座標の次元数まで。

総和をとる指数iなどは2回以上出てきている。

すべて積の形

アインシュタインの総和規約

- ベクトル演算で出てくる総和の記号 Σ の省略

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \hat{\mathbf{e}}_i \rightarrow \mathbf{u} = u_i \hat{\mathbf{e}}_i$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} u_i u_i} \rightarrow |\mathbf{u}| = \sqrt{u_i u_i}$$

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \rightarrow \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_i v_i$$

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} e_{ijk} u_i v_j \hat{\mathbf{e}}_k \rightarrow \mathbf{w} = e_{ijk} u_i v_j \hat{\mathbf{e}}_k$$

総和規約の例

総和をとる指標;ダミー指標
総和をとらない指標:自由指標

$$C_{ij} = A_{ik} B_{kj} \rightarrow C_{ij} = \sum_{k=1}^{3} A_{ik} B_{kj}$$

$$E_{ij} = A_{ik} B_{kj} + C_{il} D_{lj} \rightarrow E_{ij} = \sum_{k=1}^{3} A_{ik} B_{kj} + \sum_{l=1}^{3} C_{il} D_{lj}$$

$$d = u_i v_j \delta_{ij} \rightarrow d = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} u_i v_j \delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \rightarrow \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} D_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

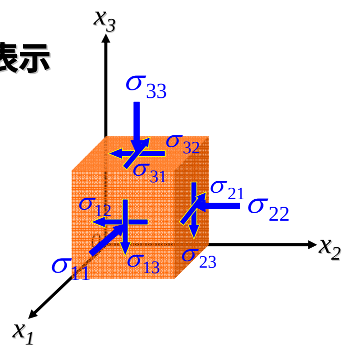
テンソル

- マトリックスを用いた表示

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

- 指標記法による表示

$$\sigma_{ij}$$



テンソル

指標表記法だと、指標の数で、テンソルの階数がわかる。

- 0th order tensor
  - □ スカラー　m
- 1st order tensor
  - □ ベクトル　$u_i \quad f_i$
- 2nd order tensor
  - □ 2階のテンソル　$\sigma_{ij} \quad \delta_{ij} \quad \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$
- 4th order tensor
  - □ 4階のテンソル　E_{ijkl}

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

テンソルの演算

■ 加算

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{13}\\B_{21}&B_{22}&B_{23}\\B_{31}&B_{32}&B_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_{11}+B_{11}&A_{12}+B_{12}&A_{13}+B_{13}\\A_{21}+B_{21}&A_{22}+B_{22}&A_{23}+B_{23}\\A_{31}+B_{31}&A_{32}+B_{32}&A_{33}+B_{33}\end{bmatrix}$$

$$A_{ij}+B_{ij}$$

■ 減算

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{13}\\B_{21}&B_{22}&B_{23}\\B_{31}&B_{32}&B_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_{11}-B_{11}&A_{12}-B_{12}&A_{13}-B_{13}\\A_{21}-B_{21}&A_{22}-B_{22}&A_{23}-B_{23}\\A_{31}-B_{31}&A_{32}-B_{32}&A_{33}-B_{33}\end{bmatrix}$$

$$A_{ij}-B_{ij}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

テンソルの演算

■ テンソルの内積

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{13}\\B_{21}&B_{22}&B_{23}\\B_{31}&B_{32}&B_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}+A_{13}B_{31}&A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}+A_{13}B_{32}&A_{11}B_{13}+A_{12}B_{23}+A_{13}B_{33}\\A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}+A_{13}B_{32}&A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}+A_{23}B_{32}&A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23}+A_{23}B_{33}\\A_{11}B_{13}+A_{12}B_{23}+A_{13}B_{33}&A_{31}B_{12}+A_{32}B_{22}+A_{33}B_{32}&A_{31}B_{13}+A_{32}B_{23}+A_{33}B_{33}\end{bmatrix}$$

$$A_{ik}B_{kj}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

テンソルの演算

■ テンソルの転置

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}\quad \text{のとき}\quad \mathbf{A}^t=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}$$

■ テンソルの大きさ (ノルム)

$$\|\mathbf{A}\|=\sqrt{A_{11}^2+A_{12}^2+A_{13}^2+A_{21}^2+A_{22}^2+A_{23}^2+A_{13}^2+A_{23}^2+A_{33}^2}$$

$$=\sqrt{A_{ij}A_{ij}}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

テンソルの演算

■ 対角和

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}$$

のとき

$$tr(\mathbf{A})=A_{11}+A_{22}+A_{33}=A_{kk}$$

特殊なテンソル

□ 単位テンソル

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad I_{ij}=\delta_{ij}$$

□ ゼロテンソル

$$\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad O_{ij}=0$$

特殊なテンソル (つづき)

- 対称テンソル

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}^t$$
$$A_{ij}=A_{ji}$$

- 反対称テンソル

$$\mathbf{A}=-\mathbf{A}^t$$
$$A_{ij}=-A_{ji}$$

- 非対称テンソル

$$\mathbf{A}\neq\mathbf{A}^t$$
$$A_{ij}\neq A_{ji}$$

- 逆テンソル

$\mathbf{S}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{I}$ なる関係を有するテンソルSをAの逆テンソルと呼ぶ

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$$

- 直交テンソル

$\mathbf{A}^t=\mathbf{A}^{-1}$ なる関係を有するテンソルAのこと

テンソルの不変量

- テンソルの成分の値は座標のとり方によって変わる。座標系に依存しないテンソルを計量するための諸量

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}$$

1次の不変量

$$I_1=tr(\mathbf{A})=A_{kk}$$

2次の不変量

$$I_2=\left(A_{ii}A_{jj}-A_{ij}A_{ji}\right)/2$$

3次の不変量

$$I_3=det|\mathbf{A}|=e_{ijk}e_{lmn}A_{il}A_{jm}A_{kn}$$

3つの不変量は、座標系が変化しても、値が変らない

テンソルの主値

- テンソルの成分の値は座標のとり方によって変わる。座標系に依存しないテンソルを計量するためのもう1つの諸量

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}$$

ある特別な座標系を定義したとき

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}$$

特性方程式:

$$det(\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{I})=0$$
$$-\lambda^3+I_1\lambda^2-I_2\lambda+I_3=0$$

特性方程式の解:3つの主値

$$\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$$

3つの主値もまた、座標系が変化しても、値が変らない

1.1 スカラー・ベクトル・テンソル・総和規約 ＜まとめ＞

- スカラー、ベクトル、テンソルについて、いくつかの例
- ベクトル、テンソル
  - 成分は座標軸が決まって与えられる
  - 座標軸に依存しない値もある
    - ベクトルはその大きさ、テンソルは不変量と主値
- ベクトル
  - 内積と外積
  - Base vector
- テンソル
  - 2階のテンソル演算は行列のそれと同じ
  - 転置、対称、非対称、反対称、逆、単位、ゼロ (特別なテンソル)
- 総和規約
  - 自由指標とダミー指標
  - 総和規約に慣れる

1.2 偏微分、面積積分、体積積分
1.3 ガウスの発散定理

- スカラー関数の偏微分
- ベクトル関数の偏微分
- テンソルの偏微分
- 面積積分、体積積分
- Gaussの発散定理

スカラー関数の偏微分

- **スカラー関数の偏微分 (定義)**

$$f = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, x_3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{dx_1 \to 0} \frac{f(x_1 + dx_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{dx_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lim_{dx_2 \to 0} \frac{f(x_1, x_2 + dx_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{dx_2}$$

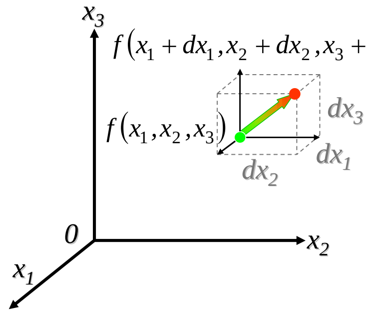
$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \lim_{dx_3 \to 0} \frac{f(x_1, x_2, x_3 + dx_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{dx_3}$$

- **スカラー関数の偏微分**
  - ハミルトンの演算子 (微分演算子)

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \cdot f = \nabla f \quad \text{ここに、} \quad \nabla = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{Bmatrix}$$

- **全微分**
  - スカラー関数の変化量

$$f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) = f(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$



$$\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1} + \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2} + \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3}$$

x_1方向の増加量

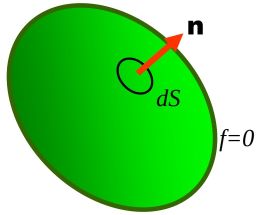
x_2方向の増加量

x_3方向の増加量

全微分 $df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$

■ **スカラー関数の偏微分係数から成るベクトルとは？**

□ **幾何学的な意味**



$$\mathbf{n} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \right\}^t$$

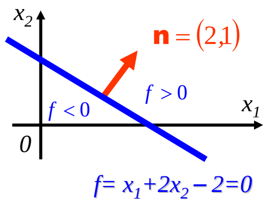
スカラー関数 f を用いて表される曲面 $f=0$ の法線ベクトルとなる。

$f<0$ を内側、$f>0$ を外側とした場合、ベクトルnは外向き法線ベクトルである。

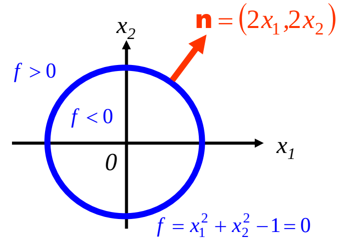
Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■ **スカラー関数の偏微分**

□ **幾何学的な意味 (例題)**



$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1$$



$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

ベクトル関数の偏微分

■ **ベクトル関数**

□ **ベクトル成分の値が位置の関数として与えられる。**

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1(x_1, x_2, x_3) \\ a_2(x_1, x_2, x_3) \\ a_3(x_1, x_2, x_3) \end{Bmatrix}$$

i 番目の成分で表すと、 $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3)$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

■ **ベクトル関数の偏微分**

□ **i 番目の成分で考えてみると、**

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3) \qquad \frac{\partial a_i}{\partial x_1}, \frac{\partial a_i}{\partial x_2}, \frac{\partial a_i}{\partial x_3}$$

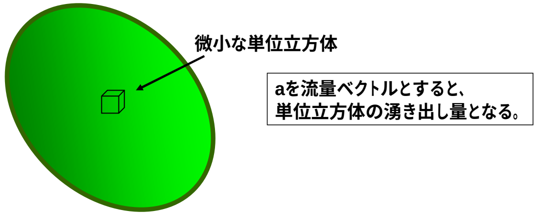
□ **3次元だと、**

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \{a_1 \quad a_2 \quad a_3\} = \nabla \bullet \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} \qquad \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$$

2階のテンソル

- **ベクトル関数の偏微分**
  - 物理的な意味
    - ベクトル関数aの各方向成分の変化率の総和

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}=\frac{\partial a_i}{\partial x_i}=div(\mathbf{a})$$ **発散量**



Advanced Geotechnical Numerical Analysis

テンソルの偏微分

- 2階のテンソルの偏微分

$\partial\sigma_{ij,k}$ と書くこともある。

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{2階のテンソル}}{\sigma_{ij}} \xrightarrow{\text{偏微分}} \underset{\text{3階のテンソル}}{\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_k}}$$

- 3階以上のテンソルの偏微分

$$\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial x_q} \qquad \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x_k\partial x_l}$$

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

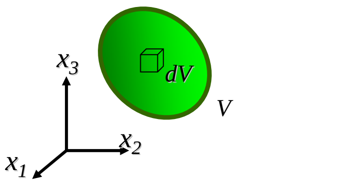
積分

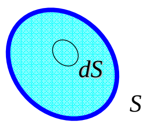
- **体積積分**

$$\int_V f(x_1,x_2,x_3)dV$$
$$=\iiint f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3$$

- **面積分**

$$\int_S f(x_1,x_2,x_3)dS$$





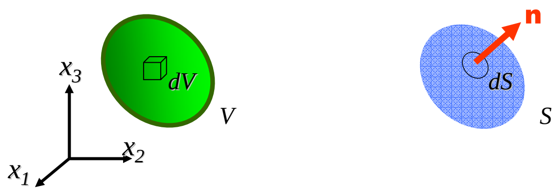
Advanced Geotechnical Numerical Analysis

Gaussの発散定理

- **ベクトル関数の体積積分と面積積分の変換式**

$$\int_V \frac{\partial a_i}{\partial x_i}dV=\int_S a_i n_i dS$$

内部における増加量　　表面を横切って出て行く量



Advanced Geotechnical Numerical Analysis

1.2 偏微分、面積積分、体積積分
1.3 ガウスの発散定理
＜まとめ＞

- スカラー関数の偏微分
  - 定義、微分演算子
  - 全微分
  - スカラー関数の偏微分係数からなるベクトル
    - 幾何学的な意味：法線ベクトル
- ベクトル関数の偏微分
  - 2階のテンソル
  - ベクトル関数aの各方向成分の変化率の総和
    - 物理的な意味：発散量
- テンソルの偏微分
  - テンソルの階数が1つ上がる
- 面積積分、体積積分
  - 定義
- Gaussの発散定理
  - 体積積分を面積積分に変換する公式

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

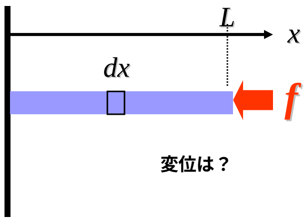
1.4 微分方程式の境界値問題と弱形式

- 微分方程式と境界値問題
- 強形式と弱形式
- 単軸棒の圧縮問題
  - 仮想仕事の原理
- 構造力学で学んだ諸解法の整理
  - 仮想仕事の原理
  - 最小仕事の原理
- 境界値問題の弱形式と有限要素法

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

微分方程式

- 単軸棒の圧縮問題



力の釣合い式 $\dfrac{d\sigma}{dx} = 0$

境界条件 $u_{x=0} = 0 \qquad f = A\sigma_{x=L}$

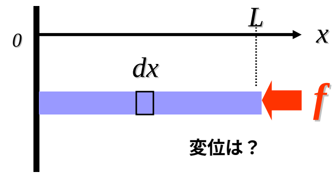
諸関係式 $\dfrac{du}{dx} = \varepsilon \qquad \sigma = E\varepsilon$

変位～ひずみ関係式　応力～ひずみ関係式

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

弱形式

- 単軸棒の圧縮問題



微分方程式 (力の釣合い式) $\dfrac{d\sigma}{dx} = 0$

$\eta_{x=0}=0$ となる**任意関数η**を考え、微分方程式の両辺に乗じて、体積積分を施す。

$$\int_V \frac{d\sigma}{dx}\eta dV = 0 \;\Rightarrow\; \int_0^L \frac{d\sigma}{dx}\eta A dx = 0 \;\Rightarrow\; f\eta_{x=L} = \int_0^L \sigma \frac{d\eta}{dx} A dx$$

今、この棒を断面積A、長さLの均質な材料を考えている

部分積分の公式
境界条件の1つを考慮 $f = A\sigma_{x=L}$ する。

$$\int_0^L \frac{d\sigma}{dx}\eta A dx = \int_0^L \frac{d\sigma\eta}{dx} A dx - \int_0^L \sigma \frac{d\eta}{dx} A dx = A[\sigma\eta]_0^L - \int_0^L \sigma \frac{d\eta}{dx} A dx = A[(\sigma_{x=L}\eta_{x=L}) - (\sigma_{x=L}\eta_{x=0})] - \int_0^L \sigma \frac{d\eta}{dx} A dx$$
$$= A\sigma_{x=L}\eta_{x=L} - \int_0^L \sigma \frac{d\eta}{dx} A dx = f\eta_{x=L} - \int_0^L \sigma \frac{d\eta}{dx} A dx$$

境界値問題

■ 強形式

微分方程式 $\dfrac{d\sigma}{dx}=0$

境界条件 $u_{x=0}=0$

$f=A\sigma_{x=L}$

諸関係式 $\dfrac{du}{dx}=\varepsilon \quad \sigma=E\varepsilon$

■ 弱形式

積分方程式 $f\eta_{x=L}=\int_0^L \sigma\dfrac{d\eta}{dx}Adx$

境界条件 $u_{x=0}=0$

諸関係式 $\dfrac{du}{dx}=\varepsilon \quad \sigma=E\varepsilon$

弱形式

$$f\eta_{x=L}=\int_0^L \sigma\frac{d\eta}{dx}Adx$$

- 弱形式による方程式を使って、具体的な解を得ていこう。任意の位置における変位は、均質な材料であることから、次のように表されるとする。

$$u=\frac{x}{L}u_{x=L}$$

- 弱形定式化において導入した任意関数も同様に、次の任意関数としよう。

$$\eta=\frac{x}{L}\eta_{x=L}$$

- このとき、

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{L}u_{x=L} \qquad \frac{d\eta}{dx}=\frac{1}{L}\eta_{x=L}$$

$$\begin{aligned}\int_0^L \sigma\frac{d\eta}{dx}Adx &= \int_0^L E\varepsilon\frac{d\eta}{dx}Adx\\ &= \int_0^L E\frac{du}{dx}\frac{d\eta}{dx}Adx\\ &= \int_0^L E\frac{1}{L}u_{x=L}\frac{1}{L}\eta_{x=L}Adx\\ &= E\frac{1}{L}u_{x=L}\frac{1}{L}\eta_{x=L}A[x]_0^L\\ &= \frac{E}{L}u_{x=L}\eta_{x=L}A\end{aligned}$$

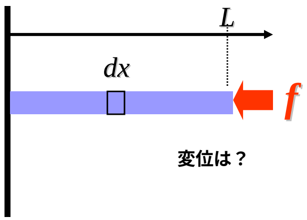
$$f\eta_{x=L}=\frac{E}{L}u_{x=L}\eta_{x=L}A$$

弱形式

$$f\eta_{x=L}=\frac{E}{L}u_{x=L}\eta_{x=L}A$$

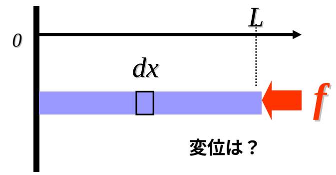
整理して、

$$f=\frac{EA}{L}u_{x=L}$$



- ここで、 $k=\dfrac{EA}{L}$ 、 $\Delta=u_{x=L}$ とおくと、$f=k\Delta$ を得る。
- つまり、点における外力と変位の関係式が得られた。良く知られるバネの力がバネ定数と変位量の積で表せる似た式である。

境界値問題



■ 弱形式

積分方程式 $\boxed{f\eta_{x=L}}=\boxed{\int_0^L \sigma\dfrac{d\eta}{dx}Adx}$

外力がなす仮想な仕事

内部でなされる仮想な仕事

$\eta_{x=0}=0$ となる任意関数η を考えた。

任意関数η を仮想変位と呼ぶと。

$\eta_{x=L}$ 外力の作用位置における仮想変位

$\dfrac{d\eta}{dx}$ 仮想変位による物体内部のひずみ

仮想仕事の原理

境界値問題が力と変位の問題であるため、“仮想仕事”と呼んだ方が、覚えやすいから、このような名前にしたのでは？

構造力学で学んだ諸解法の整理 (その1)

境界値問題
力の釣合い式　境界条件

弱形式化 ＝ 仮想仕事の原理（仮想変位の原理）

仮想変位を1とする → 単位変位の定理

＋ 応力・ひずみ関係 → 最小仕事の原理・最小ポテンシャルエネルギーの原理

物体力が無視できる場合 → カステリアーノの第１定理

構造力学で学んだ諸解法の整理 (その2)

境界値問題
変位・ひずみ関係式　境界条件

弱形式化 ＝ 補仮想仕事の原理（仮想力の原理）

仮想外力を1とする → 単位荷重の定理

＋ 応力・ひずみ関係 → 最小コンプリメンタリエネルギーの原理

物体力が無視できる場合 → カステリアーノの第２定理

- 境界値問題の弱形式と有限要素法
  - 弱形式による解法で用いた仮定
    - 任意の位置における変位

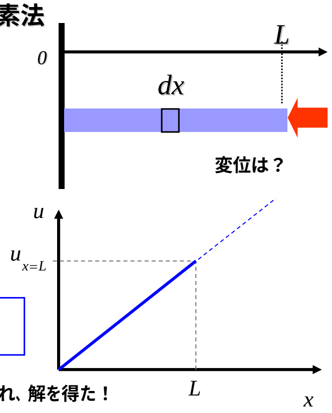
$$u = \frac{x}{L} u_{x=L}$$

    - 導入した任意関数

$$\eta = \frac{x}{L} \eta_{x=L}$$

- 変位関数を仮定
- 変位関数と同じ任意関数を仮定

方程式が導かれ、解を得た！



- 境界値問題の弱形式と有限要素法
  - 材料が複数ある場合
    - 4番目の要素を例に

微分方程式 $\frac{d\sigma}{dx} = 0$

境界条件 $u_{x=x_4} = u_4$ 　 $u_{x=x_5} = u_5$

$f_4 = A\sigma_{x=x_4}$ 　 $f_5 = A\sigma_{x=x_5}$

諸関係式 $\frac{du}{dx} = \varepsilon$ 　 $\sigma = E\varepsilon$

弱形式化

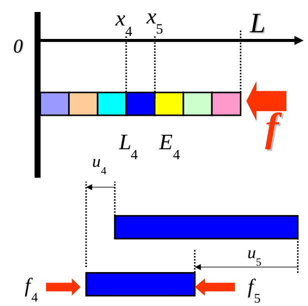
$\eta_{x=x_4} = \eta_4$ 　 $\eta_{x=x_5} = \eta_5$

となる任意関数ηを考え、微分方程式の両辺に乗じて、体積積分を施す。

積分方程式 $f_5\eta_5 - f_4\eta_4 = \int_{x_4}^{x_5} \sigma \frac{d\eta}{dx} A dx$

境界条件 $u_{x=x_4} = u_4$ 　 $u_{x=x_5} = u_5$

諸関係式 $\frac{du}{dx} = \varepsilon$ 　 $\sigma = E_4\varepsilon$



メモ

$$\int_{x_4}^{x_5} \frac{d\sigma}{dx} \eta A dx = \int_{x_4}^{x_5} \frac{d\sigma\eta}{dx} A dx - \int_{x_4}^{x_5} \sigma \frac{d\eta}{dx} A dx$$
$$= A[\sigma\eta]_{x_4}^{x_5} - \int_{x_4}^{x_5} \sigma \frac{d\eta}{dx} A dx$$
$$= A\left[\left(\sigma_{x=x_5}\eta_{x=x_5}\right) - \left(\sigma_{x=x_4}\eta_{x=x_4}\right)\right] - \int_{x_4}^{x_5} \sigma \frac{d\eta}{dx} A dx$$
$$= A\sigma_{x=x_5}\eta_{x=x_5} - A\sigma_{x=x_4}\eta_{x=x_4} - \int_{x_4}^{x_5} \sigma \frac{d\eta}{dx} A dx$$
$$= f_5\eta_{x=x_5} - f_4\eta_{x=x_4} - \int_{x_4}^{x_5} \sigma \frac{d\eta}{dx} A dx$$

■ 境界値問題の弱形式と有限要素法

□ 材料が複数ある場合

- 4番目の要素における任意の位置の変位

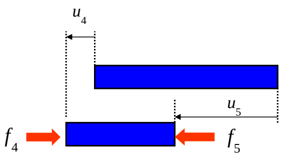
$$u = u_4 + \frac{(x - x_4)}{L_4}(u_5 - u_4)$$

- 4番目の要素における導入する任意関数

$$\eta = \eta_4 + \frac{(x - x_4)}{L_4}(\eta_5 - \eta_4)$$

$$f_5\eta_5 - f_4\eta_4 = \frac{E_4 A}{L_4}(u_5 - u_4)(\eta_5 - \eta_4)$$

$$\left\{f_5 - \frac{E_4 A}{L_4}(u_5 - u_4)\right\}\eta_5 + \left\{-f_4 + \frac{E_4 A}{L_4}(u_5 - u_4)\right\}\eta_4 = 0$$



$$\int_{x_4}^{x_5} \sigma \frac{d\eta}{dx} A dx = \int_{x_4}^{x_5} E_4 \varepsilon \frac{d\eta}{dx} A dx = \int_{x_4}^{x_5} E_4 \frac{du}{dx}\frac{d\eta}{dx} A dx$$

$$= \int_{x_4}^{x_5} E_4 \frac{1}{L_4}(u_5 - u_4)\frac{1}{L_4}(\eta_5 - \eta_4) A dx$$

$$= E_4 \frac{1}{L_4}(u_5 - u_4)\frac{1}{L_4}(\eta_5 - \eta_4) A [x]_{x_4}^{x_5}$$

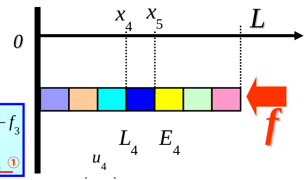
$$= \frac{E_4 A}{L_4}(u_5 - u_4)(\eta_5 - \eta_4)$$

$$\boxed{\begin{aligned} -k_4(u_5 - u_4) &= -f_4 \\ k_4(u_5 - u_4) &= f_5 \end{aligned}} \qquad k_i = \frac{E_i A}{L_i}$$

■ 境界値問題の弱形式と有限要素法

□ 材料が複数ある場合

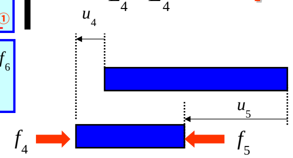
- 要素方程式



$$\begin{aligned} -k_1(u_2 - u_1) &= -f_1 \\ k_1(u_2 - u_1) &= f_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -k_2(u_3 - u_2) &= -f_2 \\ k_2(u_3 - u_2) &= f_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -k_3(u_4 - u_3) &= -f_3 \\ k_3(u_4 - u_3) &= f_4 \text{ ①} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{①}\ -k_4(u_5 - u_4) &= -f_4 \\ k_4(u_5 - u_4) &= f_5 \text{ ②} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{②}\ -k_5(u_6 - u_5) &= -f_5 \\ k_5(u_6 - u_5) &= f_6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -k_6(u_7 - u_6) &= -f_6 \\ k_6(u_7 - u_6) &= f_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -k_7(u_8 - u_7) &= -f_7 \\ k_7(u_8 - u_7) &= f_8 \end{aligned}$$



右辺がゼロになるのは、
作用反作用の法則と同じこと

① $-k_3 u_3 + (k_3 + k_4)u_4 - k_4 u_5 = 0$

② $-k_4 u_4 + (k_4 + k_5)u_5 - k_5 u_6 = 0$

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 + k_6 & -k_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & k_6 + k_7 & -k_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_7 & k_7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_8 \end{Bmatrix}$$

連立方程式へ

■ 境界値問題の弱形式と有限要素法

□ 要約すると。。。

□ 微分方程式の境界値問題を弱形式 (積分方程式) へ

□ 未知数となる (この場合は変位であった) の近似

□ 任意関数も同じ関数で近似

有限要素法
(ガラーキン法による)

□ 積分を解き、要素方程式を作る

□ 連立方程式に帰着

□ 境界条件を考慮して解く

1.4 微分方程式の境界値問題と弱形式
＜まとめ＞

□ 微分方程式と境界値問題

□ 強形式と弱形式
- 微分方程式の境界値問題を積分方程式へ変換する弱形式

□ 単軸棒の圧縮問題
- 単軸棒の圧縮問題を例題として、弱形式による解法を紹介
- この中で、仮想仕事の原理が弱形式による問題の解法を等価であることを示した。
- 参考) 構造力学の諸原理との関係

□ 境界値問題の弱形式と有限要素法
- いくつかの材料から成る単軸棒の圧縮問題
- 弱形式による解法
- 連立方程式への帰着
- 有限要素法の導入

1.5 Gaussの数値積分

- Gaussの数値積分
  - 連続関数の積分値を近似的に求める方法
  - 積分範囲は-1から1までであり、これを用いるためには座標変換を伴って用いる場合が多い。
  - 値は代数的に求めることができる。
  - 積分点の数により、真の解に近づく。
  - 有限要素法では、弱形式で定式化された境界値問題の積分項を、数値的に解くために利用される。
    - 2次元の場合、三角形1次要素、3次元の場合、四面体一次要素では、積分項が要素内で一定となるため利用しなくても済むが、地盤の解析では、これらの要素は不適切な答えが得られることがあるので、用いのが懸命→Gaussの数値積分が必要

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

- Gaussの数値積分
  - 一次元の場合

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\,d\xi = \sum_{i=1}^{m_1} w_i f(\xi_i)$$

  - 二次元の場合

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2} w_i w_j f(\xi_i,\eta_j)$$

  - 三次元の場合

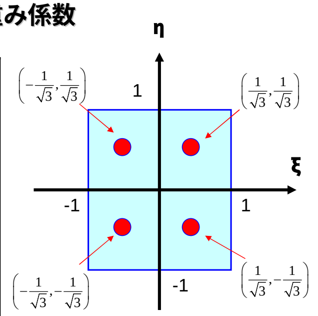
$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2}\sum_{k=1}^{m_3} w_i w_j w_k f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)$$

m_1,m_2,m_3はそれぞれξ、η、ζ軸方向の積分点の数 (通常は同じ数)
wは重み係数

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

- Gaussの数値積分
  - 積分点の数、座標値、重み係数

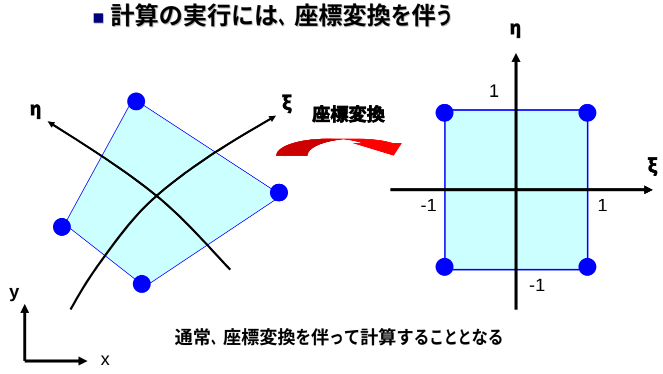
数	座標値	重み係数
1点	0	2
2点	$\pm 1/\sqrt{3}$	1
3点	0 $\pm\sqrt{3/5}$	6/9 5/9



例) 2次元における積分点とその座標値
2点×2次元＝4回
たし合わせることとなる。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

- Gaussの数値積分
  - 計算の実行には、座標変換を伴う



通常、座標変換を伴って計算することとなる

1.5 Gaussの数値積分 ＜まとめ＞

- Gaussの数値積分
  - 概要
  - 1次元、2次元、3次元のGaussの積分公式示
  - 積分点の数、座標値、重み係数
  - 実行には、通常、座標変換を伴う

1.6 連立方程式とその解法

- 有限要素法と連立方程式
  - 有限要素法を用いた解法では、最終的に連立方程式に帰着する。

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

$\mathbf{K}$ ：係数マトリクス　$\mathbf{u}$ ：未知ベクトル　$\mathbf{f}$ ：既知ベクトル

uとfは、変形解析であれば、変位ベクトルと外力ベクトル
浸透解析であれば、水頭ベクトルと流量ベクトルとなる

  - 帰着する連立方程式は、線形、あるいは、非線形に分類される。

$\mathbf{K}$ が $\mathbf{u}$ に依存しない場合を線形

$\mathbf{K}$ が $\mathbf{u}$ に依存する場合 ($\mathbf{K}(\mathbf{u})$) を非線形

⟶Newton法などにより線形方程式とする。
※この場合は収束計算が必要

- 連立方程式の解法
  - 直接法
    - Gauss法
    - Crout法
    - Choleski法
    - Skyline法

など
  - 反復法
    - 線形反復法
    - 傾斜法
  - その他の方法
    - 固有値分解法
    - モンテカルロ法

〇小規模計算 (本講義で実施するような計算) は、Gaussの消去法で十分

〇大規模計算では、計算時間の短縮化を努力が懸命。どの解法を使うかは、問題により異なる。

1.6 連立方程式とその解法 ＜まとめ＞

- 有限要素法と連立方程式
  - 有限要素法を用いた解法では、最終的に連立方程式に帰着する。
  - 帰着する連立方程式は、線形、あるいは、非線形に分類される。
- 連立方程式の解法
  - 小規模計算 (本講義で実施するような計算) は、Gaussの消去法で十分
  - 大規模計算では、計算時間の短縮化も必要となる。

Advanced Geotechnical Numerical Analysis

1.地盤挙動を解析するための基礎

＜参考図書＞

- 1.1 スカラー、ベクトル、テンソル、総和規約
  - 日本塑性加工学会編：非線形有限要素法、4ベクトルとテンソル、コロナ社、pp.129-144,1994.
- 1.2 偏微分、面積積分、体積積分
  - 小出昭一郎：物理学One Point-15 物理と微積分、共立出版、p.108,1981.
- 1.3 ガウスの発散定理
  - 白石成人・大西有三・谷口健男：新体系土木工学 5連続体の力学、2.4ガウスの発散定理、技法堂出版、pp.18-21,1988.
- 1.4微分方程式の境界値問題と弱形式
- 1.5 Gaussの数値積分
  - 日本塑性加工学会編：非線形有限要素法、2.6 非圧縮性の拘束と数値積分、コロナ社、 pp.56-60,1994.
  - 冨田佳宏：弾塑性力学の基礎と応用、5.2.1 形状関数、森北出版、pp.80-86,1995.
- 1.6 連立方程式とその解法
  - 鷲津久一郎・宮本博・山田嘉昭・山本善之・川井忠彦：有限要素ハンドブック 1基礎編、2数値計算とコンピュータ、2.連立1次方程式 ,倍風館, pp.58-93,1981.
  - 渡部力・名取亮・小国力：Fortran77による数値計算ソフトウェア、18連立1次方程式および逆行列 (小国力・長谷川秀彦) 、pp.265-298、丸善,1989.
  - 金谷健一：空間データの数理 4関数の極値と最適化、朝倉書店、pp.53-71,1995.